2012年度　ミクロ経済学中級Ib期末試験(70分)

グレーヴァ香子担当クラス

- 以下の問題すべてに答えなさい。解答は問題順でなくてもよいが、どの問題に答えているのかを明確に。
- 途中点があるので、論理の過程を読み手にわかるように書くこと。

1. 全ての財が分割可能である L 財経済を考える。ある消費者 i を考え、消費集合を $X^i = \Re^L$ とする。i の効用関数 u_i が単調であるとは、任意の消費ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X^i$ について

$$\mathbf{x} < \mathbf{x}' \Rightarrow u_i(\mathbf{x}) < u_i(\mathbf{x}')$$

が成立することである。(前件はベクトルの意味での不等号である。)

また、消費者 i の効用関数 u_i が局所非飽和性を満たすとは、任意の消費ベクトル $\mathbf{x} \in X^i$ と任意の実数 $\epsilon > 0$ について、

$$|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| < \epsilon \ \text{ and } \ u_i(\mathbf{x}) < u_i(\mathbf{x}')$$

となるような $\mathbf{x}' \in X^i$ が存在することである。

(距離はユークリッド距離 $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{L}(x'_i - x_i)^2}$ でよい。)

消費者 i の効用関数 u_i が単調であるならば、局所非飽和性を満たすことを証明しなさい。

2. many-to-one matching 問題として、インターンと病院の組み合わせ問題を考える。G_1 をインターンの集合とし、G_2 を病院の集合とする。(どちらも有限集合とする。)それぞれの主体は相手の集合の主体に対して強い選好順序(無差別なものはない)を持っているとする。各病院 $h \in G_2$ は $q_h (\geqq 1)$ 人のインターンまで同時に受け入れることができるキャパシティを持っていて、出来る限りキャパシティまで受け入れなければならないとする。Gale-Shapley のアルゴリズムは以下のようになる。

   (1) インターンがまず第1志望に応募し、各病院 h は応募者の中で自分の選好順序で上から q_h 人を waiting list に入れ、残りを却下とする。(応募者が q_h 人に達していなければ、全員を waiting list に入れる。)

   (2) 却下になったインターンは第2志望に応募し、各病院は現在の waiting list のインターンと、新しい応募者の中からトップ q_h 人を新しい waiting list に入れ、残りを却下とする。(人数不足の場合、(1) と同様。)

   (3...) (2) を繰り返し、すべてのインターンがどこかの病院の waiting list に入るか、応募したいと思ったすべての病院から却下されたときプロセスは終了し、そのときの waiting list に入っているインターンと病院がマッチされる。

   Gale-Shapley のアルゴリズムで形成される many-to-one assignment が G_1 最適であることを証明しよう。

   各 $i \in G_1$ について

$$P(i) := \{h \in G_2 \mid \exists \text{stable assignment } g \text{ such that } g(i) = h\}$$

   を i にとって possible な病院の集合とする。全てのインターン $i \in G_1$ について、Gale-Shapley のアルゴリズムによる相手 ($f(i)$ とする) より好ましい病院(すなわち、Gale-Shapley のアルゴリズムで $f(i)$ に落ち着く前にどこかで却下された病院) は possible でないことを示せばよい。

数学的帰納法を用いる。Gale-Shapley のアルゴリズムの、あるステップ (k) ($k \geqq 1$) まで、全てのインターン $i \in G_1$ は自分にとって possible な病院からは却下されていないとする。

また、このステップ (k) で、ある病院 $H \in G_2$ があるインターン $j \in G_1$ を却下したとする。このとき、H は j にとって possible でないことを示せばよい。

g として $g(j) = H$、かつ他の全ての $i \in G_1$ については $g(i) \in P(i) \setminus \{H\}$ となるような任意の assignment を考える。このとき g が stable でなければよい。これを証明しなさい。

（裏に続く）

3. 主体２人（１さんと２さん）からなる社会における Nash Implementation を考える。選択肢の集合は $A = \{a, b\}$ とする。Social choice correspondence の定義域である二人の選好順序の組み合わせは集合、$\Theta = \{\succsim, \tilde{\succsim}, \hat{\succsim}\}$ であるとする。これらのランキングは（上の方が好まれるとして）以下のようなものである。

$\succsim$:	1	2	$\tilde{\succsim}$:	1	2	$\hat{\succsim}$:	1	2
	b	a		a	b		b	b
	a	b		b	a		a	a

つまり、$b \succ_1 a$ かつ $a \succ_2 b$、ティルダのついた順序だと $a \tilde{\succ}_1 b$ かつ $b \tilde{\succ}_2 a$、ハットのついた順序だと $b \hat{\succ}_1 a$ 　かつ　 $b \hat{\succ}_2 a$ である。[1]

Social choice correspondence $\mathcal{F} : \Theta \to A$ として以下のものを考える。

$$\mathcal{F}(\succsim) = \mathcal{F}(\tilde{\succsim}) = \{a, b\}, \quad \mathcal{F}(\hat{\succsim}) = \{b\}.$$

(a) $\mathcal{F}$ は単調性 (Maskin Monotonicity) を満たすことを証明しなさい。

(b) $\mathcal{F}$ は no veto power を満たすことを証明しなさい。

(c) $\mathcal{F}$ は Nash Implementable でないことを以下の手順で証明する。
背理法の仮定として、Nash Implementable であったとしよう。するとメカニズム (M_1, M_2, g) が存在して、
(m_1, m_2) はゲーム $\Gamma(M_1, M_2, g, \succsim)$ のナッシュ均衡で、$g(m_1, m_2) = a$
$(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ はゲーム $\Gamma(M_1, M_2, g, \tilde{\succsim})$ のナッシュ均衡で、$g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) = a$
というものが存在する。つまり

$$a = g(m_1, m_2) \ \succsim_1 \ g(m_1', m_2) \quad \forall m_1' \in M_1 \tag{1}$$
$$a = g(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) \ \tilde{\succsim}_2 \ g(\tilde{m}_1, m_2') \quad \forall m_2' \in M_2 \tag{2}$$

が成立する。このとき、

$$g(\tilde{m}_1, m_2) = a$$

$$(\tilde{m}_1, m_2) \text{ はゲーム } \Gamma(M_1, M_2, g, \hat{\succsim}) \text{ のナッシュ均衡である}$$

の二つを証明しなさい。（ヒント：$A = \{a, b\}$。）
すると、$g(\tilde{m}_1, m_2) \in \mathcal{F}(\hat{\succsim})$ でなければならないが、後者は $\{b\}$ なので矛盾する。

[1]本試験の問題では「$b \succsim_1 a$ かつ $a \succsim_2 b$、ティルダのついた順序だと $a \tilde{\succsim}_1 b$ かつ $b \tilde{\succsim}_2 a$、ハットのついた順序だと $b \hat{\succsim}_1 a$ 　かつ　 $b \hat{\succsim}_2 a$ である」となっていたが、これでは不正確であった。ただし「上の方が好まれるとして」とも書いてあり、強い選好であると正しく理解した人が多かったと思う。しかし採点のときは、「a と b が無差別になる場合があるのでは？」と考えた人についても考慮して採点してある。