

2026 年度 ゲーム理論 a 演習第 2 回（自宅学習用）

Takako Fujiwara-Greve

1. 2 人標準形ゲームを考える。プレイヤー $i = 1, 2$ の純戦略の集合を S_i と書く。純戦略の範囲での、プレイヤー i のミニマックス値は以下のように定義される。（ここで j は i でないもう一人のプレイヤーである。）

$$\min_{s_j \in S_j} \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_j)$$

- (a) 以下の 2 人標準形ゲームにおいて、各プレイヤーの純戦略の範囲でのミニマックス値を求めなさい。

$1 \setminus 2$	L	C	R
U	1, -2	1, -4	1, -1
M	0, 0	3, 1	0, 0
D	-1, -1	2, -1	2, 0

- (b) 一般の有限純戦略の 2 人標準形ゲーム $G = (\{1, 2\}, S_1, S_2, u_1, u_2)$ について以下の主張を証明しなさい。

『各プレイヤー $i = 1, 2$ について、純戦略の範囲でのミニマックス値は、任意の純戦略のナッシュ均衡におけるこのプレイヤーの利得以下である。』

（記号で書くと、任意の $i = 1, 2$ と任意の純戦略ナッシュ均衡 (s_1^*, s_2^*) について、

$$\min_{s_j \in S_j} \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_j) \leq u_i(s_i^*, s_j^*)$$

が成立する。）

2. 以下の 3 つの 2 人標準形ゲーム G_1, G_2, G_3 を段階ゲームとし、完全モニタリングで無限回繰り返し、 δ を割引因子とした割引総利得を利得としたゲームを考える。

$1 \setminus 2$	L	R
U	5, 5	0, 8
D	8, 0	1, 1

G_1

$1 \setminus 2$	L	R
U	5, 5	0, 6
D	6, 0	1, 1

G_2

$1 \setminus 2$	L	R
U	7, 7	0, 8
D	8, 0	1, 1

G_3

- (a) $G_1^\infty(\delta)$ で以下のグリム・トリガー戦略の組み合わせが部分ゲーム完全均衡となる δ の下限を求めなさい。

s_1 : 第 1 期は U を行う。

第 2 期以降は、これまで 2 人が (U,L) を每期行っていたら U を、そうでなかったら D を行う。

s_2 : 第 1 期は L を行う。

第 2 期以降は、これまで 2 人が (U,L) を每期行っていたら L を、そうでなかったら R を行う。

- (b) $G_2^\infty(\delta)$ でも (a) と同じグリム・トリガー戦略の組み合わせが部分ゲーム完全均衡となる δ の下限を求めなさい。

- (c) $G_3^\infty(\delta)$ でも (a) と同じグリム・トリガー戦略の組み合わせが部分ゲーム完全均衡となる δ の下限を求めなさい。

(d) (a),(b), (c) の分析から、まったく同じ戦略の組み合わせを部分ゲーム完全均衡にする δ の下限の違いの原因を議論しなさい。

3. リスクが入った待ち合わせゲームを考える。晴れのときと雨のときでは利得が異なり、以下のようになっているとする。(これらは利得表である。第1座標がP1の利得。)

P1 \ P2	映画館	ビーチ
映画館	3, 3	3, 0
ビーチ	0, 0	5, 5

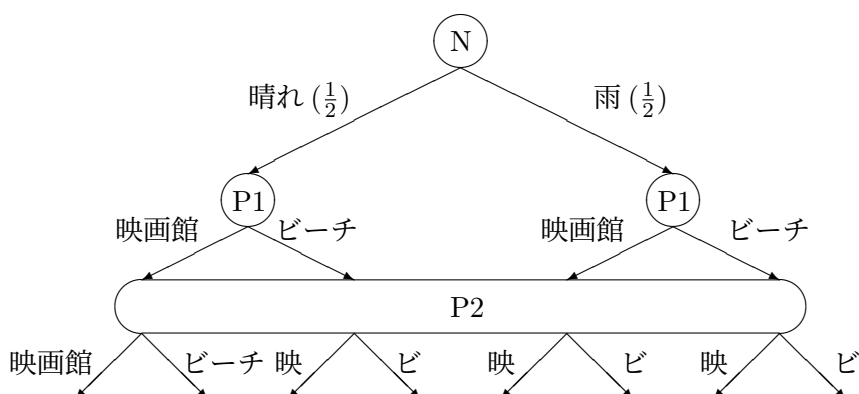
晴れのときの利得表

P1 \ P2	映画館	ビーチ
映画館	3, 3	3, 0
ビーチ	0, 0	1, 1

雨のときの利得表

P2は現在工場内で夜勤中でスマホも使えず、天気を知ることができないが、P1はお天気アプリを使える。P2が考えている事前確率は晴れと雨が $\frac{1}{2}$ ずつであり、これはP1も知っているとする。この状況で同時に映画館かビーチに行く、不完備情報同時ゲームをベイジアン・フレームワークで考える。

ゲームは、まず自然が晴れか雨かを確率 $\frac{1}{2}$ で選び、結果をP1だけが知る。その後、P1とP2は同時に映画館かビーチを選んで終わる。これを展開形ゲームとすると以下のような樹形図となる。



- (a) この樹形図の利得ベクトルの部分を完成させなさい。

P2は情報集合がただ一つなので、映画館、ビーチという2つの純戦略しかない。

P1の純戦略は(晴れの時の行動、雨の時の行動)の組み合わせなので4つある。

- (b) 2人ゲームとして誘導標準形を作り、利得は期待利得とする。この同時ゲームのナッシュ均衡を純戦略の範囲で全て求めなさい。

- (c) P1を2つのタイプに分けて、晴れタイプと雨タイプとする。P2は一人である。この3人ゲームを考える。

P2がビーチに行くときの、晴れタイプのP1の最適反応と雨タイプの最適反応を求めなさい。(純戦略の範囲でよい。以下同じ。)

- (d) (c) で求めた2タイプのP1の行動の組み合わせに対し、P2の「ビーチに行く」という戦略は最適反応か？

- (e) 同様にして、P2 が映画館に行くような 3 人ゲームのナッシュ均衡があるかを調べなさい。
- (f) (d)(e) の分析から、タイプ別プレイヤーのゲームと期待利得を使った誘導標準形のゲームのベイジアン・ナッシュ均衡が一致したかを確認しなさい。