2026年度 ゲーム理論a 演習第1回（自宅学習用）

Takako Fujiwara-Greve

1. テニスのサービスの場面をS(erver) とR(eceiver) の完備情報の２人同時ゲームと考える。プレイヤーSが選べる戦略は相手のフォアを狙う（F）とバックを狙う(B) である。プレイヤーRが選べる戦略はフォアを予想して構える（F）とバックを予想して構える(B) である。利得はそのサービスの場面で自分がポイントを得る確率とする。

   SはRと異なる戦略を選ぶとポイントを得る確率が高く、同じ戦略の場合高くない。特に、Sがフォアを狙ってRもフォアを予想していた場合、Sがポイントを得る確率は0.2、Rがポイントを得る確率は0.8であるとする。Sがバックを狙って、Rもバックを予想しているときは実はRはちょっとバックハンドが苦手なので、Sがポイントを得る確率は0.5、Rがポイントを得る確率は0.5であるとする。

   Sがバックを狙って、Rがフォアを予想して構えていたときは、Sがポイントを得る確率は0.8、Rがポイントを得る確率は0.2であるとする。最後に、Sがフォアを狙って、Rがバックを予想して構えていたときのSがポイントを得る確率をx、Rがポイントを得る確率を$1-x$とする。ただし、xは0.6以上であるとする。

   (a) この同時ゲームの（双）行列表現の表を、Sを行プレイヤー、Rを列プレイヤーとして書きなさい。
   (b) 混合戦略の範囲で全てのナッシュ均衡を求めなさい。(xに依存してよい。)
   (c) 両者とも２つの戦略を正の確率で行う、厳密な混合戦略のナッシュ均衡について、xが大きくなるとSが戦略Fを行う確率はどう変化するか？

2. ３人のプレイヤー、1,2,3がカードゲームをしている。全員が２枚のカードを持っており、ダイヤ柄(D) とクラブ柄(C) である。どちらかを同時に出してゲームは終わり（つまり純戦略はDとC)、勝ち負けが以下のようになる。勝った人は利得1を、負けた人は利得-1を、引き分けのときは全員が0を得る。ゲームは完備情報とする。

   全員が同じ柄を出した時は全員が引き分けとする。

   ２人がDを、もう一人がCを出したときは、Dを出した人たちが勝ち、Cを出した人が負けとする。

   ２人がCを、もう一人がDを出したときは、逆に、Cを出した人たちが負け、Dを出した人が勝ちとする。

   この３人同時ゲームの行列表現の表を、1を行プレイヤー、2を列プレイヤー、3を行列を選ぶプレイヤーとして書き、純戦略のナッシュ均衡を全て求めなさい。

3. 1 国と 2 国は長い間戦闘状態にあった。戦況は圧倒的に 1 国に不利になっており、2 国からは（1 国にはつらい条件の）講和の提案もなされている。

1 国の首相はこの期に及んで、「一撃講和」案を思案している。この案は、残る戦力を全て一つの局地戦に注ぎ込み、そこで局地的な勝利を得たなら、1 国に対する条件を改善した講和になるのではないかという観測に基づいている。ただしその戦いにも負ければ、諦めて現在の講和を受け入れるしかない上に、自国の被害も拡大している。

1 国の (純) 戦略は 2 つで、現状の講和案を受け入れる (End) か、局地戦を戦う (Fight) である。End を選べばゲームは終了し、1 国の利得は -100、2 国の利得は 100 である。Fight を選ぶと Nature が 1 国の局地的勝利 (Win) を確率 0.4 で、1 国の局地的敗北 (Lose) を確率 0.6 で選ぶものとする。敗北したらゲームは終了で、1 国の利得は -120、2 国の利得は 90 とする。

さて、現在の 1 国首相の頭の中では、1 国が局地的勝利した後でもゲームはすぐ終わり、このときは講和条件が改善されて、1 国の利得は -60、2 国の利得は 60 とする。

(a) この１人ゲームにおいて期待利得を最大にする 1 国首相の最適な戦略を求めなさい。

しかし、実際には 2 国の大統領が講和の提案をしているからといって講和になるかは別問題であり、それは 2 国が選べるはずである。つまり真実のゲームは 1 国が Fight を選び、Nature が 1 国の Win を選んだ後は 2 国の手番（かつ情報集合）となる。そこで 1 国の予想通り 2 国の大統領が講和 (End) を選べば、1 国の利得は -60、2 国の利得は 60 である。しかし、2 国の大統領は戦争継続 (Continue) も選べる。このときは、2 国が大規模攻撃を行い、Nature が 2 国の大勝利 (Big) を確率 0.7 で、小規模の勝利 (Small) を 0.3 で選ぶ。いずれにせよ、2 国が負けることはないのでここでゲームが終了する。2 国の大勝利後の 1 国の利得は -300、2 国の利得は 300、2 国の小規模の勝利後の 1 国の利得は -200、2 国の利得は 200 とする。以下の樹形図の終点 (a)-(d) の利得ベクトルの部分を完成させ、完備完全情報、各プレイヤーは期待利得を最大にすると仮定して、後ろ向き帰納法の解（あるいは部分ゲーム完全均衡）を全て求めなさい。