2025年度 ゲーム理論a 期末試験解答

Takako Fujiwara-Greve

- 今年はかなり出来が悪かった。一つの理由は、受験者の準備不足である。毎回の出席率も非常に低かった。
- 深い専門科目の試験対策は単なる計算問題の対策ではないことをよく考えよう。
- 私の講義では、ゲームとは何か、から始めて、戦略とは何か、均衡とは何か、をちゃんと教えている。授業に出ないで、適当に過去問や「教科書」を読み流しても、ゲーム理論の基礎すら固められないのである。
- 逆に、ゲーム理論の本質だけでも理解していれば、その後の人生でも役に立つ。

  たとえば、ときどき、書き殴りのような答案がある。読みにくいと、正解を書いていても採点者に誤解されて、採点ミスにつながる可能性がある。また、社会に出たら、書き殴ったものを他人に出すわけがない。相手の反応を予想して行動する、これがゲーム理論の大切な教訓の一つである。

1. (a), (b) の出来が非常に悪い。計算問題だけを練習して試験に臨んだのか。「理論」の授業なのであるから、「戦略とは」というような概念を正しく理解することから始めるのが正しい勉強方法であった。大いに反省してほしい。

   (a) まずプレイヤー１の純戦略は、（最初の情報集合での行動、２つ目の情報集合での行動）と書くと、

   $$(U,L),(U,R),(D,L),(D,R)$$

   の４つである。混合戦略全体の集合はこれらに確率をつけたもの全体である。
   これでも正解とするが、もう少し数学的に書きたければ、例えば p を (U,L) を行う確率、q を (U,R) を行う確率、r を (D,L) を行う確率と定義する。すると、$1-p-q-r$ が（D,R) を行う確率となり、混合戦略全体の集合は

   $$\Sigma_1 = \{(p,q,r,1-p-q-r) \mid 0 \leqq p,q,r \leqq 1\}$$

   と表現できる。
   あるいは戦略を明記して

   $$\Sigma_1 = \{p*(U,L)+q*(U,R)+r*(D,L)+(1-p-q-r)*(D,R) \mid 0 \leqq p,q,r \leqq 1\}$$

   などとしてもよい。これらと同じようなものが書けていればよい。

   (b) 行動戦略は、そのプレイヤーが持つ全ての情報集合で、そこで選べる行動を確率的に、かつ独立に、選ぶ行動計画である。
   具体的にプレイヤー１の行動戦略は、最初の情報集合で U を選ぶ確率を p とし、２つ目の情報集合で L を選ぶ確率を q とすると、これら２つを決めるものである。

   $$\{(p,q) \mid 0 \leqq p \leqq 1, 0 \leqq p \leqq 1\}$$

   あるいは行動を明記して、

   $$\{(p*U+(1-p)*D, q*L+(1-q)R) \mid 0 \leqq p \leqq 1, 0 \leqq p \leqq 1\}$$

   でもよい。これらと似たようなことが書けていればよい。

(c) ただ一つある。まず、真部分ゲーム（の一つ）としてプレイヤー２が A または B を選び、同時にプレイヤー１が L または R を選ぶところを取り出す。利得行列の順序に注意するとこれは

1 \ 2	A	B
L	0, 2	2, 3
R	2, 2	0, 4

という 2 × 2 ゲームであるから、ナッシュ均衡がただ一つあり、(L,B) である。（樹形図をよく見ても、プレイヤー２にとって、行動 A は B に厳密に支配されていることがわかるはず。）

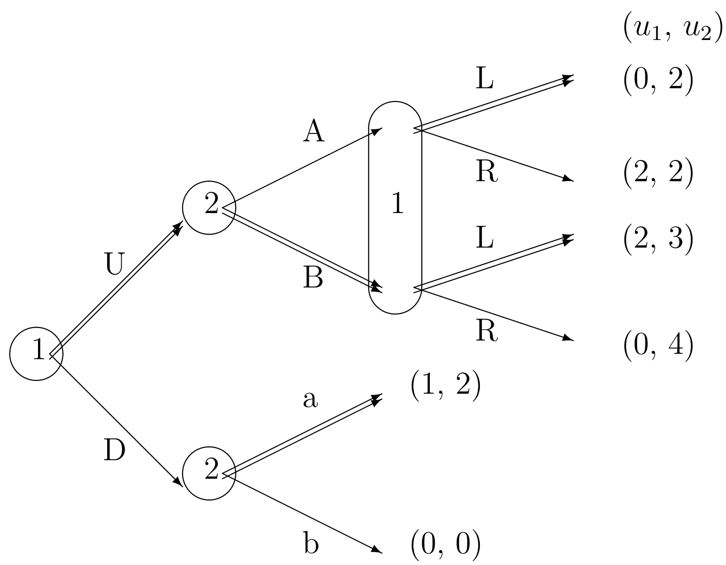
また、プレイヤー２の下の情報集合から始まる部分ゲーム（これも真部分ゲームの一つ）は一人ゲームなのでそこでの最適行動は a を確実に行うことである。

以上を踏まえるとプレイヤー１の最初の情報集合でも最適な行動は U を確実に行うことなので、唯一つの純戦略からなる部分ゲーム完全均衡があって、プレイヤー１の純戦略は（最初の情報集合での行動、２つめの情報集合での行動）プレイヤー２の純戦略は（上の情報集合での行動、下の情報集合での行動）と書くとすると

$$(s_1, s_2) = ((U, L), (B, a))$$

である。

樹形図を辿ると、部分ゲーム完全均衡は以下の２重矢印の組み合わせを戦略の組み合わせとして書ければよい。（同じ情報集合における行動は同じでなければならないことに注意。）



（注意：(U,L,B) とか、(U,B,L) とか、(s_1, s_2) =((U,L),B) とか、((U,R,L)(B,a)) などと書いている人が散見された。

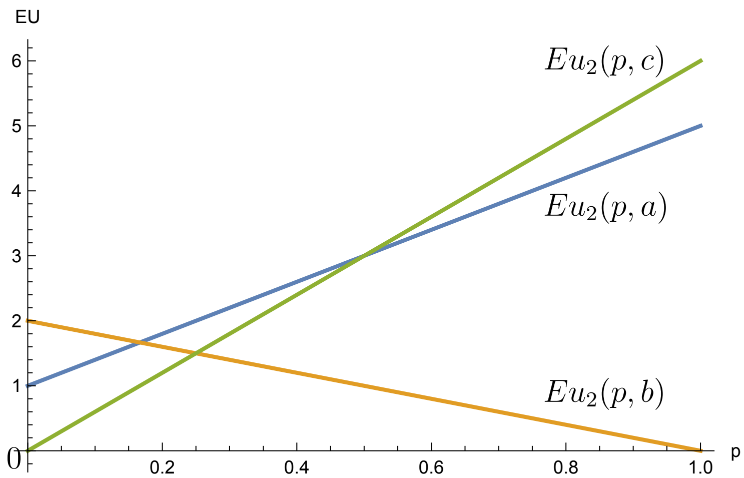
最初の３つは、授業中に何回か注意した「経路」を「均衡」と思い込むという間違いをおかしている。

全ての情報集合において行動を決めておくのが戦略であり、均衡は戦略の組み合わせで表現する。経路外の予定が何であるかによって最適かどうかが変わってくることがあるからである。

((U,R,L)(B,a)) と書いた人はそもそも情報集合の意味を理解していない。）

2. (a) ある。(A,c) と (B,b) のみである。

   (b) 図は以下。



   (c) ない。なぜなら (b) のグラフが示しているのは、P1 がどんな混合戦略 $pA+(1-p)B$ をしても、P2 にとって３つの純戦略に正の確率をつけることは最適反応ではないということだから。（最適反応は３つの直線のうち最も高い期待利得を与えるものを辿って求める。）

   (d) 部分ゲーム完全均衡ではない。
   プレイヤー１が s_1 に従っているとして、プレイヤー２が s_2 に従っていると第１期は (A,c)、第２期は (B,b) が起きるので総利得は

$$6+2=8$$

   である。
   ここで、プレイヤー２が第１期に a, 第２期は s_2 のまま、という戦略に変更したとすると第１期は (A,a)、第２期は (A,c) が起きるので総利得は

$$5+6=11$$

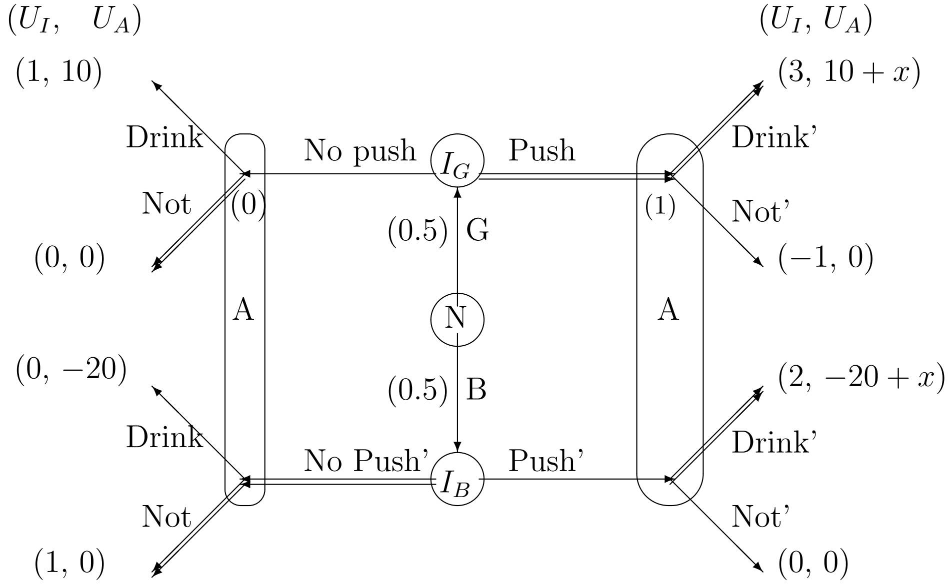
   に増加する。

3. (a) 期待利得は

$$(0.5)\cdot 10+(0.5)\cdot(-20)<0$$

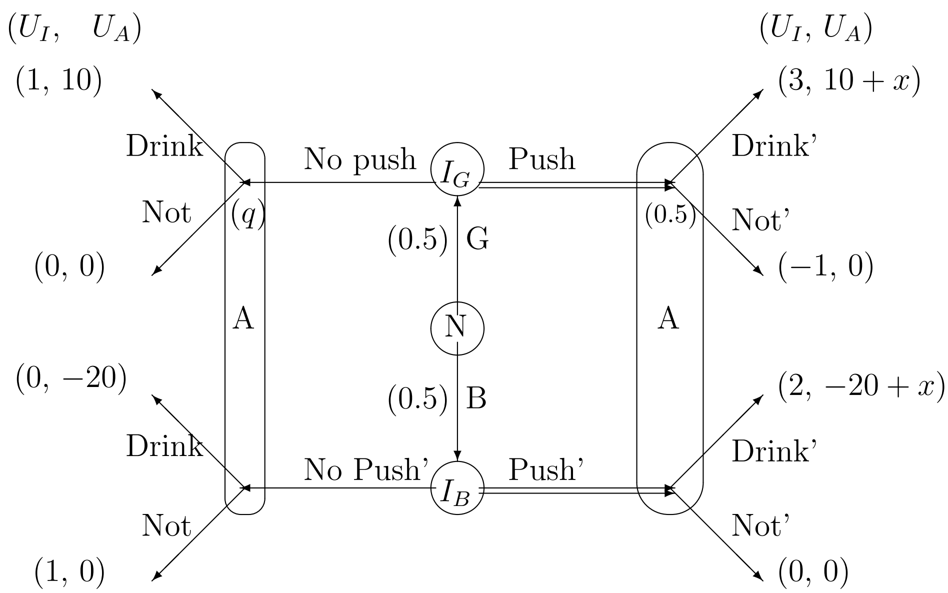
   であるから飲まないのが最適な行動である。

   (b) ない。
   I さんが分離戦略 (Push, No Push') をしていると、A さんの整合的な信念は $q=0$, $r=1$ である。このときの A さんの最適な行動は No Push を見たら Not, Push を見たら Drink' である。（下図参照。答案に図を描いても、もちろんよい。）



しかし、A さんの (Not, Drink') という戦略に対して、B タイプの I_B さんは No Push' から Push' に変えることで利得を 1 から 2 に増やすことができるので I さんの分離戦略は最適反応ではない。

(c) I さんが一括戦略 Push/Push' をしているときは、整合的な A さんの信念は $r = 0.5$ だけ確定する。（下図参照。）



まず、Push/Push' 後の（右の）A さんの情報集合で、もし A さんが Not' を選ぶなら、G タイプの I さんの利得は –1 となり、これは No Push のときの G タイプの I さんのどの利得よりも低いので、G タイプの I さんが Push をすることは最適反応ではなくなる。

したがって、両方のタイプが Push をすることが均衡であるなら、右の情報集合で A さんは Drink' をしていなければならない。$r = 0.5$ であるから、そのためには以下の不等号が成立していなければならない。

$$(0.5)(10+x) + (0.5)(-20+x) \geqq 0 \iff x \geqq 5.$$

さて、$x \geqq 5$ で右の情報集合で A さんが Drink' を選ぶなら、どちらのタイプの I さんも No Push/No Push' 後に得られる利得より高いものを得るので、No Push/No Push' に逸脱することはない。つまり左の情報集合では A さんは何をしていても均衡となる。ただし、A さんの行動と整合的な q を指定しておく必要はある。

No Push/No Push' 後の（左の）情報集合で A さんが Drink を選ぶことが最適なのは

$$q \cdot 10 + (1-q)(-20) \geqq 0 \iff q \geqq 2/3.$$

したがって（純戦略の場合）以下の 2 種類の完全ベイジアン均衡がある。

$(s_I, s_A, q, r) =$ ((Push, Push'), (Drink, Drink'), q, 0.5) で $q \geqq 2/3$ であるもの。

$(s_I, s_A, q, r) =$ ((Push, Push'), (Not, Drink'), q, 0.5) で $q \leqq 2/3$ であるもの。

どちらか書けていれば正解とする。