第8章　2項モデルによるデリバティブ価格評価

8.1　デリバティブとは

デリバティブというカタカナ語が日本で知られるようになってからそれほど年数が経っていない．しかし，金融派生商品という意味でのデリバティブが広く認知されるようになったのは，欧米においてもここ 2、30 年のことと思われる．まず，デリバティブについて，簡単にまとめておこう．

8.1.1　原資産と金融派生商品

本来，**金融派生商品** (*derivative*) は**原資産** (*underlying asset*) とよばれる既存の金融資産の価値 (価格) を基礎にその価値 (価格) が定められる契約を指した．例えば株式先物，株式オプション，債券オプションなどは，代表的な例である．

株式のヴァニラ・オプション市場が立ちあがってから，半世紀も立たずに，既存の金融資産に限定されない様々な金融商品が開発され大きな市場になりつつある．たとえば，不動産価格，ある地域の気温・降水量などの天候情報，平均株価指数などに依存するさまざまな金融商品が開発され，さまざまなリスクをヘッジする手段として売買されている．つまり原資産といってみても，すでに実態として金融資産である必要はないというのが，デリバティブを広義に解釈する立場である．

広義にデリバティブを解釈する立場にたつなら，**条件付請求権** (*contingent claim*) という言い方をするほうがよいという人もいる．

注意 41. デリバティブとは結局，不確実である将来のさまざまな状態に依存して価値が契約上定められる金融資産ということになる．しかし，生命保険・損害保険・企業の発行する社債ですら，デリバティブであると強弁することすら可能である．つまり，その商品の将来価値が不確実であって，状態ごとに異なるならば，条件付請求権であると言い得てしまう．

天候デリバティブのような金融商品と，損害保険のような金融商品の間にどれだけ明確な線引きができるかは，本当はわからない．

この授業では，株式オプションや債券オプションのように，原資産として既存の金融資産をもつデリバティブを中心に扱う．

8.2　デリバティブの価格決定

デリバティブの価格決定理論を，この節で扱う．目標は，原資産価格とデリバティブ価格の明示的な関係を導出することである.（株式のヨーロピアン・コール (プット) についての Black–Scholes 公式は，その中で最も著名なものである.）

さらに，デリバティブの価格決定理論は，デリバティブを売買する人間にとって，ダイナミックなヘッジを行なう手段を示唆する．この点も授業で扱う．

研究史的には，1973 年にブラックとショールズが，株式のヨーロピアン・オプションの価格決定理論を，確率微分方程式の理論に基づいて展開したのが先駆けといえるだろう．彼らは，

1. 株価変動をブラウン運動でモデル化.
2. 株式オプションの価格を株価の関数として，伊藤の補題によりブラウン運動を用いて表現.
3. 株式オプションと株式と無リスク資産の関係から，ブラック=ショールズ偏微分方程式をえる．
4. 偏微分方程式を，株式オプションのペイオフ関数を境界値条件として解き，ブラック=ショールズ公式をえる．

という段階を経て，結論に至っている．実は，最後の段階のみが，固有のデリバティブの性質に関係している理論展開になっている．よって，様々なデリバティブに対して，統一的に価格決定を議論できる枠組みを，彼らは提供していたのである．

その後，デリバティブの価格決定理論は，適切な確率測度の変換によってえられるリスク中立確率を用いて，将来キャッシュ・フローの期待価値を現在に割り引いたものとしてデリバティブ価格が決まるという一般理論にまとめられる．そこでは，

1. 無裁定条件
2. ポートフォリオの複製

という考え方が決定的な役割をはたす.

この講義では，株式オプションの価格について，歴史的な展開とは反対の順番で議論を進める．

8.3 株式オプション

8.3.1 はじめに

株式オプション，特にヨーロピアン・オプションは，デリバティブとして典型的なものとして取り上げられることが多い．これは，すでに述べた，ブラック=ショールズによって最初に本格的に議論されたデリバティブという理由にもよる．

将来の決められた時点，あるいは決められた時点ならびにそれ以前の任意の時

点で，決められた価格で株式 (原資産とよぶ）を購入あるいは売却する権利をオプションとよぶ．説明に出てきた決められた時点を満期，決められた価格を行使価格という．原資産を購入する権利をコール・オプション，原資産を売却するオプションをプット・オプションという．さらに，権利行使の時点が満期時点，一点であるオプションをヨーロピアン・オプション，権利行使が満期時点以前のいつでも可能なオプションをアメリカン・オプションとよばれる．

オプションを購入しようとする主体はロング (long) のポジションにいるといい，オプションを発行しようとする主体はショート (short) のポジションにいるといい，さらに発行する主体をライター (writer) という．

何故このような「権利」が，金融商品として成り立ちうるのか．それは，原資産（ここでは株式）の将来価格変動のリスクを回避したいという要求に答えるからである．次のような例を考えよう．

かなり激しく価格が変動する株式を保有する主体がいるとする．この主体は，今後 3ヶ月以内に株式を売却したいと考えている．現時点で仮に株価が 1 万円として，3ヶ月後に 50% の確率で 1 万 2000 円に，50%の確率で 8000 円になるとしよう．もし 3ヶ月後が満期の行使価格 1 万 500 円のヨーロピアン・プット・オプションの価格が 800 円だったとすると，この主体はこのオプションを購入することで，

株価 1 万 2000 円の場合 売却益 2000 円－オプション価格 800 円＝ 1200 円純益

株価 8000 円の場合 売却益 500 円－オプション価格 800 円＝ 300 円純損失

オプションを購入しない場合の 3ヶ月後の期待収益は，

$$\frac{1}{2} \times 2000\,円 + \frac{1}{2} \times (-2000\,円) = 0\,円$$

収益の標準偏差は

$$\sqrt{\frac{1}{2} \times 2000^2 + \frac{1}{2} \times (-2000)^2} = 2000\,円$$

であるのに対して，オプションを購入した場合の 3ヶ月後の期待収益は，

$$\frac{1}{2} \times 1200\,円 + \frac{1}{2} \times (-300\,円) = 450\,円$$

収益の標準偏差は

$$\sqrt{\frac{1}{2} \times (1200 - 450)^2 + \frac{1}{2} \times (-300 - 450)^2} = 750\,円$$

と期待収益が増加すると同時にリスクも各段に減少する．

前期の数理ファイナンスの授業で扱った，資産選択理論においても，ある資産の収益率と負の相関をもつような変動をする別の資産をもつことで標準偏差で表されたリスクを軽減できることを示した．しかし，考えてみると，そうしたリスク・ヘッジができることの前提として，様々な金融商品の収益率変動の確率行動を正確につかんでいることを忘れてはならない．具体的に，投資対象 A に興味がある投資家が，リスクをヘッジする場合には，投資対象に対して「効率的」なヘッジが可能な投資対象 B を知らなくてはならない．

しかし，デリバティブの場合，ある投資対象に興味をもつ投資家は，リスク・ヘッジのために，当該投資対象についてのデリバティブを適切に購入すればよい．つまり，オプションをはじめとするデリバティブは，そもそも商品自体がリスク・ヘッジに使えるというシグナルを投資家に発しているといってもよい．

注意 42. *90* 年代おわりころの *LTCM* 破綻による金融市場の混乱や，ロシア金融危機他で,「ヘッジ・ファンド」という言葉が新聞紙面に踊り，テレビのニュースでも連呼された．当時ヘッジ・ファンドに，怪しげな金融取引を行なう組織，金融秩序を破壊する集団というイメージをもった人も多かった．現実問題として，当時大小の「ヘッジ・ファンド」のうち多くは，高度なヘッジ技術に裏打ちされたわけでもなく，超短期の資金を用いての高率の収益を約束して，出資を募る投資会社であった．そのうち悪質なものは，擬装倒産，出資金の着服などもあったといわれている．

ヘッジ *(hedge)* は本来，資産に対する「防壁」という原義から転じて，資産リスクを回避するという意味をもつ用語である．それが，なぜ投機 *(speculation)* を主たる業務とする「ヘッジ・ファンド」の中に入っているかというと，以下の理由による．完璧なヘッジ技術をもつ投資主体は，ある投資対象のリスク中立な収益率・価格を知ることができる．よって，市場価格の動向をみて，その価格からの乖離がある限り，鞘が稼げるのである．初期の *LTCM* が債券市場において，高率の収益率を確保できたのも，債券オプションを通じての完璧なヘッジ技術があってのものであった．

LTCM の破綻の理由の一つ *(*あくまで一つ*)* は，金融市場の混乱によって完璧なヘッジという存立基盤が崩れたことにある．

8.3.2　ヨーロピアン・オプション

今，ある株式の価格 S を考える，特に時点を特定する場合，$S(t)$，$S(0)$ などのように記す．株式オプションは，この株価に連動して，ペイオフ (payoff) が生ずるデリバティブである．つまり，オプションの購入は，かならず権利行使に関して生ずる原資産（この場合株式）の取引から，利得あるいは損失に関するキャッシュ・

フローがもたらされる．それをペイオフとよぶ．

ヨーロピアン・コールの場合，満期時点 T における株価 $S(T)$ が権利行使価格 K を上回った場合，K で株式を購入し即時に $S(T)$ で売却することで

$$S(T) - K$$

のペイオフが一株あたり生ずる．逆に $S(T)$ が権利行使価格 K を下回った場合，権利行使することはないからペイオフはゼロである．

演習 24. S の関数として，コールのペイオフがどのようになるかグラフで描いてみよ．

ヨーロピアン・プットの場合，満期時点 T における株価 $S(T)$ が権利行使価格 K を下回った場合，株式 $S(T)$ で購入し即時に価格 K で売却することで

$$K - S(T)$$

のペイオフが一株あたり生ずる．逆に $S(T)$ が権利行使価格 K を上回った場合，権利行使することはないからペイオフはゼロである．

演習 25. S の関数として，プットのペイオフがどのようになるかグラフで描いてみよ．

なお，オプションの購入者が権利行使可能な時点で，権利行使したときに正のキャッシュ・フローが生ずる場合をイン・ザ・マネー (in-the-money)，負のキャッシュ・フローが生ずる場合をアウト・オブ・ザ・マネー (out-of-the-money)，キャッシュ・フローが生じない場合をアット・ザ・マネー (at-the-money) とよぶ．

取引において，買い手となることをロング (long)，売り手となることをショート (short) という．

8.3.3　アメリカン・オプション

ヨーロピアン・オプションは，権利行使価格で原資産である株式を購入することができるのが，満期時点のみであるのに対して，アメリカン・オプションでは，オプション購入時から満期時点までの任意の時点で，権利行使が可能となる．

アメリカン・オプションに関しても，ヨーロピアン・オプション同様，コールとプットが存在する．また，付随する用語に関しても，すべて同様である．

注意 43. 当然，オプションの購入者にとっては，権利行使に関する選択の余地が広い金融資産であることがわかる．

8.4　オプション価格の性質

すでに見たように，オプションはそれを売買する主体に対して，状況に応じて正のペイオフを生じさせるものであるから，金融市場において正の価格で取引されると考えられる．以下コール・オプションの価格を C，プット・オプションの価格を P で表し，必要に応じて時点を特定する表示を $C(t)$ や $P(0)$ のように加える．さらに，アメリカン・オプションについては，$C_A(t)$ や $P_A(0)$ のようにアメリカンであることを明示するようにする．

現時点を 0 時点，満期時点 T を $T > 0$ を満たすものとして，株式 1 単位あたりのコール・オプションの価格が金融市場において，どのように定まるかを我々は知りたい.（その答えが，著名な Black–Scholes 公式である.）

ここでは原資産が将来的にどのように確率的に変動するかの仮定に依存する Black–Scholes 公式の導出する前に，現時点から満期時点までの各時点における，原資産である株式の価格 $S(t)$ とコール・オプション価格 $C(t)$，さらには権利行使価格，安全資産利子率 r の間にどのような関係があるかを調べておく．

注意 44. この部分で得られた，結果は *Black–Scholes* 公式のような株価の変動に関する一切の仮定に依存していないことに注意しよう．

ただし，簡単化のために次の仮定をおく

仮定 5. 期間 $[0, T]$ において，安全資産の利子率は変動しない．また，その期間内に株式の配当はない．時間は連続的に経過するとし，複利計算は連続複利であるとする．

注意 45. 上記の仮定 *5* の後半の連続時間に関する部分を離散時間に置きかえる場合，以下の記述において複利計算の対応を次のように読みかえればよい．

$$e^{-r(T-t)} \longleftrightarrow (1+r)^{-(T-t)} \tag{8.1}$$

コール・オプションならびにプットは，ある一定の範囲に収まることを示すことができる．最初にオプション価格の下界 (lower bound) を示す．

命題 13. 仮定 *5* の下で，任意の $t \in [0, T]$ において以下の不等式が成立する．

$$C(t) \geq max\{S(t) - Ke^{-r(T-t)}, 0\} \tag{8.2}$$

$$C_A(t) \geq max\{C(t), S(t) - K\} \tag{8.3}$$

$$P(t) \geq max\{Ke^{-r(T-t)} - S(t), 0\} \tag{8.4}$$

$$P_A(t) \geq max\{P(t), K - S(t)\} \tag{8.5}$$

[証明] 最初にヨーロピアン・コール・オプションを考える.

時点tで以下のポートフォリオAとポートフォリオBを組み，オプションの満期時点Tまで保有し清算することを考える．その場合の2つのポートフォリオの間に裁定がないと想定し，所望の関係を導く.

ポートフォリオ A ヨーロピアン・コール・オプションを1単位購入.

ポートフォリオ B 原資産を1単位購入と同時に$Ke^{-r(T-t)}$貨幣単位だけ無リスク利子率で借り入れ，満期までポジションをくずさず，T時点で清算する.

さて，時点tにおけるそれぞれのポートフォリオのキャッシュ・フローをまとめると

ポートフォリオ A $C(t)$貨幣単位の支出.

ポートフォリオ B $S(t) - Ke^{-r(T-t)}$貨幣単位の支出.

となる.

またオプションの満期時点Tにおけるそれぞれのポートフォリオのキャッシュ・フローをまとめると

ポートフォリオ A $C(T) = \max\{S(T) - K, 0\}$貨幣単位の流入.

ポートフォリオ B $S(t) - K$貨幣単位の流入.

となる.

ここで，2つの事項を確認しておく.

1. 満期時点Tにおいて，ポートフォリオAの流入金額はポートフォリオBの流入金額を下回ることはない.
2. $s \in (t, T]$の各時点において，2つのポートフォリオのネットのキャッシュ・フローはゼロである.

ここで仮に時点tにおいてポートフォリオAの支出金額がポートフォリオBの支出金額を下回るとすると，ポートフォリオAはポートフォリオBより確定的に有利である．よって，裁定が生じてしまう．よって

$$C(t) \geq S(t) - Ke^{-r(T-t)}$$

である．さらに，ポートフォリオ A のキャッシュフローは $s \in (t,T]$ においてゼロであるから，$C(t) < 0$ ならば裁定が生じてしまう．よって

$$C(t) \geq 0$$

である．両者の不等号をあわせて所望の不等式 (8.2) をえる．

次に，アメリカン・コール・オプションの場合，アメリカン・コールの買い手は定義上，任意の時点 $s \in (t,T)$ において権利を行使することで，ヨーロピアン・コールの買い手の利得を最低限獲得することができる．さらに満期時点を含む任意の時点 $\tau \in (t,T)$ において権利行使することで $S(t) - K$ 貨幣単位を獲得できる．よって，無裁定ならば

$$C_A(t) \geq C(t) \quad \text{かつ} \quad C_A(t) \geq S(t) - K$$

である．これにより (8.3) をえる．

ヨーロピアン・プットならびにアメリカンプットの下界に関しては，コールの場合と同様に証明できる．

(証明おわり)

演習 26. 命題 *13* の後半部分，つまりプットに関する不等式を証明せよ．

次にオプション価格の上界 (upper bound) を示す．

命題 14. 仮定 *5* の下で，任意の $t \in [0,T]$ において以下の不等式が成立する．

$$C(t) \leq S(t) \tag{8.6}$$

$$C_A(t) \leq min\{C(t), S(t)\} \tag{8.7}$$

$$P(t) \leq Ke^{-r(T-t)} \tag{8.8}$$

$$P_A(t) \leq K \tag{8.9}$$

[証明] ヨーロピアン・コールに関する (8.6) とアメリカン・プットに関する (8.9) は自明である．

さてアメリカン・コールの場合を考える．つぎの 2 つのポートフォリオを考える．

ポートフォリオ A アメリカン・コール・オプションを 1 単位購入．

ポートフォリオ B　ヨーロピアン・コール・オプションを1単位購入し，ポートフォリオAの保有者が権利行使した時点で，自分のヨーロピアン・コールを全額売却．

さて時点tにおける2つのポートフォリオのキャッシュ・フローは，

ポートフォリオ A　$C_A(t)$ 貨幣単位の支出

ポートフォリオ B　$C(t)$ 貨幣単位の支出

となる．

時点$\tau \in [t, T)$でポートフォリオAの保有者が権利行使をしたとすると，それぞれのポートフォリオのキャッシュ・フローは，

ポートフォリオ A　$S(\tau) - K$ 貨幣単位の流入

ポートフォリオ B　$C(\tau)$ 貨幣単位の流入

となる．

時点$\tau \in [t, T)$でポートフォリオAの保有者が権利行使をしなかったとすると，それぞれのポートフォリオのキャッシュ・フローは，

ポートフォリオ A　0貨幣単位の流入

ポートフォリオ B　0貨幣単位の流入

となる．さらに，この場合，満期時点において2つの場合に分けられる．

$S(T) > K$ **の場合**　**ポートフォリオ** A　権利行使をして $S(T) - K$ 貨幣単位のネットの流入

ポートフォリオ B　権利行使をして $S(T) - K$ 貨幣単位のネットの流入

$S(T) \leq K$ **の場合**　**ポートフォリオ** A　権利放棄をして0貨幣単位の流入

ポートフォリオ B　権利放棄をして0貨幣単位の流入

命題13において，

$$(\forall \tau \in [t, T)) \ \ S(\tau) - Ke^{-r(T-\tau)} \leq C(t)$$

だから，当然

$$(\forall \tau \in [t, T)) \ \ S(\tau) - K \leq C(t)$$

結局

ポートフォリオ A の支出額 $\leq$ ポートフォリオ B の支出額

だから，

$$C_A(t) \leq C(t)(\forall \tau \in [t, T])$$

アメリカン・オプションは時点 $\tau \in [t, T]$ で権利行使したときのみ，$S(\tau) - K$ のキャッシュフローが発生するが，明らかにこの値は $S(\tau)$ を下回る．よって無裁定であるならば，

$$C_A(t) \leq S(t) \quad (\forall \tau \in [t, T])$$

が成立する．以上をまとめた，アメリカンコールに関する所望の不等式をえる．
ヨーロピアン・プットについても同様に証明できる.（演習としてのこす.

(証明おわり)

演習 27. 命題 *14* のヨーロピアン・プットに関する不等式を証明せよ．

注意 46. 配当が存在しないばあ，無裁定が市場で成立する場合，上記 *2* つの命題から

$$C(t) = C_A(t) \quad (\forall \tau \in [t, T])$$

が成立する．つまり，配当がない場合，アメリカン・コールとヨーロピアン・コールの価値は同じであり，アメリカン・コールを期間前に権利行使することは最適でない．つまり，期間内配当が見込まれる場合のみ，アメリカン・オプションの権利事前行使の意義がある．

なお，ヨーロピアン・コールとヨーロピアン・プットの価格の間には，**プット・コール・パリティ**(put-call parity) よばれる次の関係があることが知られている．

命題 15. 仮定 *5* の下で，任意の $t \in [0, T]$ において以下の等式が成立する．

$$P(t) = C(t) - S(t) + Ke^{-r(T-t)} \tag{8.10}$$

[証明] 時点 t で以下のポートフォリオ A とポートフォリオ B を組み，オプションの満期時点 T まで保有し清算することを考える．その場合の 2 つのポートフォリオの間に裁定がないと想定し，所望の関係を導く．

ポートフォリオ A　ヨーロピアン・コール・オプションを 1 単位購入．原資産を 1 単位空売り．無リスク利子率 r で $Ke^{-r(T-t)}$ で預金.

ポートフォリオ B　ヨーロピアン・プット・オプションを 1 単位購入.

さて，時点 t におけるそれぞれのポートフォリオのキャッシュ・フローをまとめると

ポートフォリオ A　$C(t) - S(t) + Ke^{-r(T-t)}$ の支出．(単位は円あるいは他の貨幣単位)

ポートフォリオ B　$P(t)$ の支出．(単位は円あるいは他の貨幣単位)

次の満期時点 T におけるそれぞれのポートフォリオは，オプション権利の行使のある $S(T) > K$ の場合と，権利行使のない $S(T) \leq K$ の場合で異なる.

$S(T) > K$ **の場合** **ポートフォリオ** A　無リスク預金の解約代金 K で原資産 1 単位購入の権利行使．同時に空売りを原資産 1 単位返却で 0 円のネット流入．(単位は円あるいは他の貨幣単位)

ポートフォリオ B　権利放棄で 0 円のネット流入．(単位は円あるいは他の貨幣単位）

$S(T) \leq K$ **の場合** **ポートフォリオ** A　無リスク預金の解約代金 K で原資産 1 単位を価格 $S(T)$ で購入し．同時に空売りを原資産 1 単位返却で $K - S(T)$ のネット流入．(単位は円あるいは他の貨幣単位)

ポートフォリオ B　プット・オプションの権利行使で $K - S(T)$ のネット流入．(単位は円あるいは他の貨幣単位）

$s \in (t, T)$ の各時点では，キャッシュ・フローは生じない．ということは，2 つのポートフォリオは，t 時点でのキャッシュ・フローが一致しないと裁定が生じてしまうことになる．よって，

$$P(t) = C(t) - S(t) + Ke^{-r(T-t)}$$

が成立する.

(証明おわり)

注意 47. 以上の論証において，*2* つのポートフォリオはお互いに，**複製**の関係にあるという．つまり，*2* つのポートフォリオ，どの時点のどの状況においても，同じキャッシュ・フローを保証する本質的に同等のポートフォリオなのである.

注意 48. アメリカン・オプションの価格に関して，ヨーロピアン・オプションの場合のように明解な等式で結ばれる関係はない．

命題 16. 仮定 5 の下で，任意の $t \in [0, T]$ において以下の不等式が成立する．

$$S(t) - K \leq C_A(t) - P_A(t) \leq S(t) - Ke^{-r(T-t)} \tag{8.11}$$

[証明]

$$(\forall \tau \in [t, T]) \quad S(t) - K \leq C(t) - P_A(t) \tag{8.12}$$

を示す．すると，命題 13 から不等式の前半部分が導かれる．

これまでと同様に，以下の 2 つのポートフォリオを考える．ただし，ポートフォリオ A はポートフォリオ B で空売りしたアメリカン・プットの事前権利行使が行なわれた段階で清算をおこなうとする．

ポートフォリオ A ヨーロピアン・コール・オプションを 1 単位購入．アメリカン・プット・オプションを 1 単位空売り．

ポートフォリオ B K 円を無リスク利子率で借入．原資産を 1 単位購入．

初期の時点 t における 2 つのポートフォリオのネットのキャッシュ・フローは，

ポートフォリオ A $S(t) - K$ 円の支出．

ポートフォリオ B $C(t) - P_A(t)$ 円の支出．

満期時点前の $\tau \in [t, T)$ において，アメリカン・プットの事前行使があった場合，2 つのポートフォリオのネットのネットのキャッシュ・フローは，

ポートフォリオ A 原資産の売却と借入金返済により $S(\tau) - Ke^{r(\tau - t)}$ 円の流入．

ポートフォリオ B 空売りしたアメリカン・プットの返却代金とヨーロピアン・コールの売却代金の差 $S(\tau) - K + C(\tau)$ 円の流入．

満期時点前の $\tau \in [t, T)$ において，アメリカン・プットの事前行使がなかった場合，2 つのポートフォリオのネットのキャッシュ・フローは，

ポートフォリオ A 0 円．

ポートフォリオ B 0 円．

満期時点で $S(T) > K$ の場合の，2 つのポートフォリオのネットのネットのキャッシュ・フローは，

ポートフォリオ A 原資産の売却と借入金返済により $S(T) - Ke^{r(T-t)}$ 円の流入.

ポートフォリオ B ヨーロピアン・コールの権利行使により $S(T) - K$ 円の流入.

ここで，ポートフォリオ B は空売りしたプット・オプションの権利行使が行なわれないことから $C_P(T) = 0$ になることから，売却代金が 0 円になっていることに注意しよう.

満期時点で $S(T) \leq K$ の場合の，2 つのポートフォリオのネットのネットのキャッシュ・フローは，

ポートフォリオ A 原資産の売却と借入金返済により $S(T) - Ke^{r(T-t)}$ 円の流入.

ポートフォリオ B 空売りしたプット・オプションの権利行使に対して生ずる $S(T) - K$ 円の流入.（実際は，$K - S(T)$ 円の売却代金分の支出）

以上で，(8.12) が示されたので，前半部分はおわり．次に不等式の後半を示す．命題 13 におけるアメリカン・プットとヨーロピアン・プットの関係に注意すると，

$$(\forall \tau \in [t, T]) \ \ C(t) - P_A(t) \leq S(t) - Ke^{-r(T-t)}$$

が導かれる．また命題 14 から

$$(\forall \tau \in [t, T]) \ \ C_A(t) \leq C(t)$$

が成立するので所望の不等式を得る.

(証明おわり)

注意 49. 以上の結果は，原資産価格の変動がどのような確率構造に基づくかにまったく異存していない．つまり確率的にノン・パラメトリックな関係であり非常に頑健な結果であるといえる．このことは，チェビシェフの不等式の意味と似ている.（さらに言えば，注意 *45* による複利計算の読み替えをした上で，離散時間が連続時間かということにも依存しない.）

確率論におけるチェビシェフの不等式は，確率分布の分散の大きさに関する言明であるが，確率分布に関する一切の前提から独立である．つまり，あの不等式は，一様分布だろうと，ポアソン分布だろうと，正規分布だろうと，ありとあらゆる分布に適用される広範な結果である.

しかし，チェビシェフの不等式は一般的な関係であるが，実はその一般性ゆえに個別の確率分布に関する情報をわれわれに豊富に与えてくれるわけではない．この節での関係も同様である．実際，オプションの価格を明解に与えるためには，以下の節で展開するように原資産価格変動に関して特定化しなくてはならない.

8.5 1期間2項モデルにおけるオプション価格

この節では，多期間 2 項モデルにおけるオプション価格の決定の基礎となる 1 期間 2 項モデルを扱う．その場合，前期のリスク中立確率の方法によって得られたオプション価格の決定式を基礎に帰納法を使って多期間 2 項モデルのオプション価格を導く．最終的には，多期間 2 項モデルの極限操作によって Black–Scholes 公式を導出するのがこの講義の目的である.(「千里の道も 1 歩から」ということ.)

最初に，$\max\{x, 0\}$ という表現がたくさん出てくるため，以下のように簡単化の表記を定めておく.

定義 7.

$$\{x\}^+ := max\{x, 0\}$$

今，離散時間を考えることにし，現時点で投資家が想定する金融商品は 3 種類とする.

株式 1 期間後における価格変化は 2 種類．それぞれ売却益が異なる危険資産.

無リスク預金 1 期間後に確実に収益をもたらす安全資産.

ヨーロピアン・コール 株式価格に連動してペイオフが定まる危険資産．ただし，株価変動のリスクヘッジに使用.

オプションの購入時点を時点 0，オプションの満期時点を 1 と考える．原資産（ここでは株式）の時点 0 での価格を S あるいは $S(0)$ とし正の値であるとし，時点 1 の株価を $S(1)$ とする．このとき，次の仮定をおく.

仮定 6.

$$P(S(1) = u \times S \,|\, S(0) = S) \;=\; p \tag{8.13}$$

$$P(S(1) = d \times S \,|\, S(0) = S) \;=\; 1 - p, \tag{8.14}$$

$$(0 < p < 1,\ u > d) \tag{8.15}$$

つまり，株価は 1 期間経つと，ある確率でかならず uS か dS のどちらかになるということである.（ただし，$uS > dS$ に注意.）また，行使価格を K とする.

さらに，この期間における無リスク利子率(純利子率）をrで記し，粗利子率をRと記す．つまり，$r = R - 1 > 0$とする．

さて無リスク預金の価格を1円と考えることを念頭において，配当行列を考えると，株価の2つの状態に対して，

$$D = \begin{pmatrix} uS & dS \\ R \times 1 & R \times 1 \\ \{uS - K\}^+ & \{dS - K\}^+ \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

という，3×2行列が得られる．このとき，市場が無裁定であると考えて，金融商品間の価格の基本的な関係を導いていく．

命題 17. 市場が無裁定であるための必要かつ十分条件は，$u > R > d$である．

[証明]

無裁定であるために必要かつ十分条件は，正の要素からなる状態請求権価格ベクトル$\phi = (\phi_1\ \phi_2)$が存在して，

$$\begin{pmatrix} S \\ 1 \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uS & dS \\ R \times 1 & R \times 1 \\ \{uS - K\}^+ & \{dS - K\}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{8.17}$$

が成立する．このとき当然，以下の式も成立している．

$$\begin{pmatrix} S \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uS & dS \\ R \times 1 & R \times 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

この式は，実は現時点の株価$S > 0$に無関係な

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & d \\ R \times 1 & R \times 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

という連立方程式である．実際に解いてやると

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{R}\frac{1}{u - d} \begin{pmatrix} R - d \\ u - R \end{pmatrix} \tag{8.18}$$

となる．これまでの仮定を考慮にいれると，要素がともに正であるための必要かつ十分条件は，

$$u > R > d$$

であることがわかる．

(証明おわり)

命題 18. 市場が無裁定であるばあい，ヨーロピアン・コール・オプションの時点 *0* での価格は以下の式で与えられる．

$$C = \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}\{uS-K\}^{+} + \frac{u-R}{u-d}\{dS-K\}^{+}\right) \tag{8.19}$$

[証明] さて状態請求権価格ベクトル $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ は (8.18) で得られている．
さて C は，(8.17) より

$$C = \{uS-K\}^{+} \cdot \phi_1 + \{dS-K\}^{+} \cdot \phi_2$$

であるから，(8.18) を用いて所望の式を得る．

(証明おわり)

注意 50.

$$\frac{1}{R} = \phi_1 + \phi_2$$

であるからリスク中立確率は

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{u-d}\begin{pmatrix} R-d \\ u-R \end{pmatrix} \tag{8.20}$$

となり，ヨーロピアン・コール・オプションの価格が，*2* 種類の状態に関するリスク中立確率を用いて計算した期待値を無リスク利子率を用いて現時点に割り引いたものに等しくなっていることがわかる．

演習 28. ヨーロピアン・プット・オプションの価格を，同様にして求めよ．また，*1* 期間のプット・コール・パリティの関係から，プット・オプションの価格を求め答えが一致することを確かめよ．

注意 51. *2* 項モデルにおけるヨーロピアン・コールの価格公式 *(18)* は，最初に導いた人達の人名の頭文字をとって **CRR 公式**とよばれることがある[1]．

[1] Cox, J.,Ross, S.A. and Rubinstein, M, “Option Pricing: A Simplified Approach,” *Journal of Financial Economics*, **7**, 1979, pp.229-268 をみよ．

最後に，1 期間 2 項モデルにおけるデルタ・ヘッジについて述べる．今,

$$\theta = \frac{u\{uS - K\}^+ - d\{dS - K\}^+}{R(u-d)}$$

$$\Delta = \frac{\{uS - K\}^+ - \{dS - K\}^+}{S(u-d)}$$

と定義する．このとき,

$$\begin{cases} R\theta + uS\Delta = \{uS - K\}^+ \\ R\theta + dS\Delta = \{dS - K\}^+ \end{cases} \tag{8.21}$$

が成り立っている．このことは，安全資産を θ 単位購入し，さらに株式を Δ 単位だけ価格 S で購入するポートフォリオが，ヨーロピアン・コールを 1 単位購入するポートフォリオと同じキャッシュ・フローをもたらすことを示している．実際,簡単な計算により

$$C = \theta + S\Delta$$

である．

上の式を投資家の行動と対比させて考えると，無裁定市場において原資産 (株式)Δ 単位のロング・ポジションをとる投資家は 1 単位のヨーロピアン・コールをショート・ポジションをとることで完全なリスクヘッジができるということになる．つまり，上のポートフォリオは，安全資産を複製している．

8.6　多期間 2 項モデルにおけるオプション価格

今度は前の節の仮定に加えて

仮定 7.

$$P(S(t+1) = u \times S \mid S(t) = S) \;=\; p \tag{8.22}$$

$$P(S(t+1) = d \times S \mid S(t) = S) \;=\; 1 - p, \tag{8.23}$$

$$(0 < p < 1,\ u > d) \tag{8.24}$$

とする．

今，株価が変動する期間を $t=0,1,2$ とし，$S(0)=S$ とすると $t=2$ における株価の可能性は，u^2S, udS, d^2S の 3 種類，しかもその確率はそれぞれ

$$p^2,\ 2p(1-p),\ (1-p)^2$$

となる．さらに株価を変動する期間を $t=0,1,2,3$ とし，$S(0)=S$ とすると $t=3$ における株価の可能性は，u^3S, u^2dS, ud^2, d^3S の 4 種類，しかもその確率はそれぞれ

$$p^3,\ 3p^2(1-p),\ 3p(1-p)^2,\ (1-p)^3$$

となる．

一般に株価を変動する期間を $t=0,1,2,\ldots,T$ とし，$S(0)=S$ とすると $t=T$ における株価の可能性は，$T+1$ 種類，また上から k 番目の高さの株価になる確率は 2 項定理により

$$\begin{pmatrix} T \\ k-1 \end{pmatrix} p^{T-k+1}(1-p)^{k-1}$$

となる．

演習 29. 株価 $S(t)$ が上昇・下降する過程（分岐過程）を，横軸を時間，縦軸を株価にとってグラフ化してみよ．

さてオプション価格を定めるのに，2 項分布が関係しそうなことが，上のことから分かるが，実はオプション価格の計算に必要な上昇・下降の確率は上記の $p, 1-p$ ではなく，前の節で計算した 1 期間モデルにおけるリスク中立確率 $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ なのである.（ビックリ !!! ）

以下，2 項分布に関する表現に用いるために

$$q=\hat{\phi}_1=\frac{R-d}{u-d}$$

と記す．現時点を 0 時点，満期時点を T とする，ヨーロピアン・オプションを考える．このとき，2 項分布に関する分布関数を

$$\mathcal{B}(i;T,q)=P(B(T,q)\leq i)=\sum_{j=0}^{i}\begin{pmatrix} T \\ j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{T-j}$$

と記し，また 2 項分布に関する補分布関数を

$$\mathcal{B}_c(i;T,q)=P(B(T,q)\geq i)=\sum_{j=i}^{T}\begin{pmatrix} T \\ T-j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{T-j}$$

と記す.

注意 52. *2* 項分布の分布関数と補分布関数については，以下の式が成立する．

$$\mathcal{B}_c(i;T,q) = \begin{cases} 1-\mathcal{B}(i-1;T,q) & i=1,2,\dots,T \\ 1 & i=0 \end{cases}$$

演習 30. 上のことを確認せよ．

ヨーロピアン・オプションの価格決定を考えるときに，無裁定条件からわかる，簡単でありながら重要な点をいくつかまとめておこう.（これまでの復習もふくむ.）

1. ヨーロピアン・オプションの価格を特徴づけるのは，満期時点 T と権利行使価格 K であり，発行時点がいつであるかはオプション価格と関係がない．
2. $1-q=\hat{\phi}_2$
3. $C(T,S(T))=\{S(T)-K\}^+$,
   $P(T,S(T))=\{K-S(T)\}^+$
4. $C(t,S(t))=\dfrac{1}{R}\left(\hat{\phi}_1 C(t+1,uS(t))+\hat{\phi}_2 C(t+1,dS(t)\right)$

補助定理 1 (パスカルの 3 角形). 自然数 n と $\ell \le n$ を考えると，

$$\begin{pmatrix} n \\ \ell \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ \ell+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ \ell+1 \end{pmatrix}$$

演習 31. 補助定理 *1* を証明せよ.（定義に戻って，左辺を計算し，項を整理せよ.）

補助定理 2.

$$\{u^j d^{T-j}S-K\}^+ = \begin{cases} u^j d^{T-j}S-K & j \ge \frac{\log(\frac{K}{d^T S})}{\log(\frac{u}{d})} \text{の場合} \\ 0 & j < \frac{\log(\frac{K}{d^T S})}{\log(\frac{u}{d})} \text{の場合} \end{cases}$$

[証明]

$$u^j d^{T-j}S-K \ge 0 \Longleftrightarrow u^j d^{T-j}S \ge K > 0$$

であることから，両辺の対数をとり，j について整理することで，同値な条件として

$$j \ge \frac{\log(\frac{K}{d^T S})}{\log(\frac{u}{d})}$$

を得る.（証明おわり）

補助定理 3.

$$C(0,S) = \frac{1}{R^T}\sum_{j=0}^{T}\begin{pmatrix} T \\ j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{T-j}\{u^j d^{T-j}S - K\}^+$$

[証明] さて任意の $t = 0, 1, 2, \ldots, T-1$ に対して，すでに指摘したように，

$$C(t, S(t)) = \frac{1}{R}\left(qC(t+1, uS(t)) + (1-q)C(t+1, dS(t)\right)$$

が成立する．これは，T 時点から 0 時点への，時間の経過と逆向きの漸化式とみることができるために，帰納法によりゼロ時点のコール・オプションの価格 $C(0, S(0))$ を計算することができるはずである．以下それを行なう．

まず補助定理自体の主張より一般的な以下の式が成立することを示す．つまり $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ に対して，

$$C(t, S(t)) = \frac{1}{R^{T-t}}\sum_{j=0}^{T-t}\begin{pmatrix} T-t \\ j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{T-t-j}\{u^j d^{T-t-j}S(t) - K\}^+ \tag{8.25}$$

が成立することを示そう．

これを，T を帰納法の出発点として上の (8.25) を示そう．まず，既にふれた注意により $C(T, S(T)) = \{S(T) - K\}^+$ は，$t = T$ の場合に (8.25) が成立することを示している.（帰納法の基底の証明おわり）

次に，ある時 t で (8.25) が成立したと仮定すると（帰納法の仮定！），以下のよ

うな展開が可能となる．

$$
\begin{aligned}
& C(t-1,S(t-1)) \\
= \;& \frac{1}{R}\left(qC(t,uS(t-1))+(1-q)C(t,dS(t-1))\right) \\
= \;& \frac{1}{R^{T-t+1}}\times \\
& \left(\sum_{j=0}^{T-t}\begin{pmatrix} T-t \\ j \end{pmatrix} q^{j+1}(1-q)^{T-t-j}\{u^{j+1}d^{T-t-j}S(t-1)-K\}^{+}\right. \\
+ \;& \left.\sum_{j=0}^{T-t}\begin{pmatrix} T-t \\ j \end{pmatrix} q^{j}(1-q)^{T-t+1-j}\{u^{j}d^{T-t+1-j}S(t-1)-K\}^{+}\right) \\
= \;& \frac{1}{R^{T-(t-1)}}\times \\
& \left(\sum_{j=1}^{T-(t-1)}\begin{pmatrix} T-t \\ j-1 \end{pmatrix} q^{j}(1-q)^{T-(t-1)-j}\{u^{j}d^{T-(t-1)-j}S(t-1)-K\}^{+}\right. \\
+ \;& \left.\sum_{j=0}^{T-t}\begin{pmatrix} T-t \\ j \end{pmatrix} q^{j}(1-q)^{T-(t-1)-j}\{u^{j}d^{T-(t-1)-j}S(t-1)-K\}^{+}\right) \\
= \;& \frac{1}{R^{T-(t-1)}}\left(W_0+\sum_{j=1}^{T-t}\left(\begin{pmatrix} T-t \\ j-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} T-t \\ j \end{pmatrix}\right)W_j+W_{T-(t-1)}\right) \\
= \;& \frac{1}{R^{T-(t-1)}}\sum_{j-0}^{T-(t-1)}W_j
\end{aligned}
$$

となり，時点 $t-1$ についても (8.25) が成立することが示された．なお，途中で記号の簡単化のために

$$
W_j := q^{j}(1-q)^{T-(t-1)-j}\{u^{j}d^{T-(t-1)-j}S(t-1)-K\}^{+}
$$

とおいた．その後で補助定理 1(パスカルの 3 角形) を使った．

以上により，$t=T,T-1,\ldots,2,1,0$ の各時点で，(8.25) が成立することが示せた．最後に $t=0$ とおいて，所望の関係を得る.（証明おわり）

最後に，2 項分布の補分布関数を使って，離散型の場合のヨーロピアン・コール・オプションの価格公式を得る[2]．

---

[2]評価式は，連続型の場合の Black–Scholes 公式に対応している．事実，この授業で後に示すように，ここでの評価式からある種の極限操作により，Black–Scholes 公式を導くことができる．

命題 19 (多期間 CRR 公式). 現時点 *(0 時点)* の原資産価格が $S(0)=S$ である場合のヨーロピアン・コール・オプションの価格は以下の式で与えられる.

$$C(0,S)=S\times\mathcal{B}_c(j^*;T,q')-KR^{-T}\times\mathcal{B}_c(j^*;T,q) \tag{8.26}$$

ここで,

$$q'=\frac{u}{R}q$$

であり, j^* は $\frac{\log(\frac{K}{d^TS})}{\log(\frac{u}{d})}$ より大きな最小の整数を表わす.

注意 53. $0<q'<1$ である.（確認せよ.）

[命題 8.26 の証明] 補助定理 3 より

$$C(0,S)=\frac{1}{R^T}\sum_{j=0}^{T}\begin{pmatrix}T\\j\end{pmatrix}q^j(1-q)^{T-j}\{u^jd^{T-j}S-K\}^+$$

であるが, 補助定理 2 と j^* の定義より

$$\{u^jd^{T-j}S-K\}^+=\begin{cases}u^jd^{T-j}S-K & j\geq j^*\text{の場合}\\ 0 & j<j^*\text{の場合}\end{cases}$$

であることから,

$$\begin{aligned}C(0,S)&=\frac{1}{R^T}\sum_{j=j^*}^{T}\begin{pmatrix}T\\j\end{pmatrix}q^j(1-q)^{T-j}(u^jd^{T-j}S-K)\\&=S\sum_{j=j^*}^{T}\begin{pmatrix}T\\j\end{pmatrix}\left(\frac{qu}{R}\right)^j\left(\frac{(1-q)d}{R}\right)^{T-j}-\frac{K}{R^T}\sum_{j=j^*}^{T}\begin{pmatrix}T\\j\end{pmatrix}q^k(1-q)^{T-j}\\&=S\times\mathcal{B}_c(j^*;T,q')-KR^{-T}\mathcal{B}_c(j^*;T,q)\end{aligned}$$

（証明おわり）

演習 32. 離散型のプット・コール・パリティの式

$$C(0,S)-P(0,S)=S-KR^{-T}$$

と注意 *52* と命題 *19* から, ヨーロピアン・プット・オプションの価格が

$$P(0,S)=KR^{-T}\mathcal{B}(\hat{j};T,q)-S\mathcal{B}(\hat{j};T,q')$$

で与えられることを示せ. ただし, $\hat{j}$ は $\frac{\log(\frac{K}{d^TS})}{\log(\frac{u}{d})}$ より小さな最大の整数をあらわす.

8.7　同値マルチンゲール測度とリスク中立確率

この章をおわるにあたって，2 項確率モデルのような単純な価格分岐を基礎とする確率過程を考える場合，ファイナンス数学 I で示したような,「無裁定条件が成り立つ市場において証券価格は，将来配当のリスク中立確率による期待値を現在に割り戻したものに等しい」という命題がが成立することを確認しておく.

$t = 0, 1, 2, \ldots, T$ の各時点を考えるとき，すでにみたように，原資産である株価は $S(0) = S$ から 2 項過程によって分岐してゆき，$t = 0$ で１種類の株価，$t = 1$ で 2 種類の株価，$t = 2$ で 3 種類の株価，$t = 3$ で 4 種類の株価，最終の $t = T$ で $T + 1$ 種類の株価が実現する.

t 期における株価 $S_t = S(t)$ は，その時点までに，何回「上昇」u が実現したか，あるいは同じことだが何回「下落」d が実現したかにのみ依存する．例えば，$t = 2$ のとき udS という株価が実現する場合は,「上昇・下降」「下降・上昇」という 2 つの分岐過程の結果が考えられるが，株価 udS という水準自体を決めているのは,「上昇 1 回，下降 1 回」という事象のみである.

よって，t 時点において実現した株価をあらわす記法として以下のものを採用する．つまり $S_t(m), (0 \leq m \leq t)$ によって t 時点までに「上昇」u が m 回あった場合の株価を表わす.

注意 54. $S_t(m)$ を考えるとき,「上昇」は m 回だから当然「下降」は $t - m$ 回となる．よって，

$$S_t(m) = u^m d^{t-m} S, \quad (0 \leq m \leq t)$$

である.

このことから，t から n 期先の $t + n$ における株価の間には

$$S_{t+n}(m + \ell) = u^{\ell} d^{n-\ell} S_t(m) \tag{8.27}$$

という関係がある.

演習 33. *(8.28)* を示せ.

これまでにも何度も表れたリスク中立確率

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r - d}{u - d}, \quad \hat{\phi}_2 = \frac{u - r}{u - d}$$

を使うと，t 時点と $t + n$ 時点の株価の間に以下の命題が成立することがわかる.

命題 20. $t+n$ 時点の株価と t 期の株価には以下の関係式が成立する.

$$S_t(m) = R^{-n} \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \hat{\phi}_1^j \hat{\phi}_2^{n-j} S_{t+n}(m+j) \tag{8.28}$$

演習 34. 上の命題 *20* を証明せよ.(簡単)

定義 8. 無リスク粗利子率 R が一定値をとるとき，確率過程 X_t を R を用いて

$$\tilde{X}_t = \frac{1}{R^t} X_t$$

と定義した $\tilde{X}_t$ を X_t の割引過程とよぶ.

注意 55. 株価 S_t が *2* 項過程に従うとき，株価の割引過程 $\tilde{S}_t$ に関して

$$\tilde{S}_t(m) = \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \hat{\phi}_1^j \hat{\phi}_2^{n-j} \tilde{S}_{t+n}(m+j) \tag{8.29}$$

が成立する．また，無リスク債券を考えると，債券価格 B_t に関して,

$$B_t = R^t B_0$$

が成立するから，債券価格 B_t の割引過程を考えると

$$\tilde{B}_t = \frac{1}{R^t} B_t = \frac{1}{R^t} R^t B_0 = B_0$$

であるから，実は $(\forall t)(\forall \ell)\ \tilde{B}_t(\ell) = B_0$ であることに注意すると，次の関係が自明に成立する.

$$\tilde{B}_t(m) = \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \hat{\phi}_1^j \hat{\phi}_2^{n-j} \tilde{B}_{t+n}(m+j) \tag{8.30}$$

(8.29) と，(8.30) はまったく同じ形式をしているが，実は，$t = 0, 1, 2, \ldots, T$ において想定しうる事前の株価の経路 2^T 個に関して定まる，離散確率測度 Q を考えるときに，それぞれ

$$\tilde{S}_t = E_Q \left[\tilde{S}_{t+n} \;\middle|\; \tilde{S}_t \right]$$

$$\tilde{B}_t = E_Q \left[\tilde{B}_{t+n} \;\middle|\; \tilde{B}_t \right]$$

が成立することを意味する．この関係が成立することを「株価過程と無リスク債券過程が，マルチンゲールになる」とよぶ．

実は，行使価格と満期を固定して考えたヨーロピアン・コール・オプション価格 C_t とヨーロピアン・プット・オプション価格 P_t が，市場が無裁定であるとき，またそのときに限って，**それぞれの割引過程**がマルチンゲールになることを示すことができる．

最後に，将来株価が 2 項過程に従って変動することを前提にしたが (115 ページ)，これまで何度も強調したようにすべての金融商品の将来価格にかかわるのは，無裁定条件から求まるリスク中立確率測度であった．つまり，証券価格の計算に本質的な「上昇」「下降」の分岐のリスク中立確率 $q, 1-q$ は，株価が現時点に比してどれだけ変化するかの 2 つの可能性を表す u, d と無リスク粗利子率 R の 3 つの数値で定まり，本来の確率 $p, 1-p$ と数値的にはなんの関連もない．

しかし，2 項モデルにおける確率測度として両者を比べると，重要な共通点がある．それは上昇・下降の構造が同じという本来当たり前のことである．つまり，$t=0$ から最終時点 $t=T$ の $T+1$ 種類の状態に至る価格の経路に付与される確率の構造は，2 項分布に基づいている．これにより，2 つの確率測度において，片方で確率ゼロが付与されるのに一方では正の確率が付与されることはなく，確率がゼロとなる事象が両者が完全に一致する．このことを 2 つの**確率測度が同値**であるとよぶ．

8.8　まとめ

これまで，

- オプション取引の定義と，意義をまとめた．
- コール・オプション価格ならびにプット・オプション価格の上限と下限を無裁定条件のみから求めた．(ノンパラメトリック・アプローチ)
- 配当がない場合の 2 期間モデルからヨーロピアン・コール・オプション価格を求めた．
- 同様に，ヨーロピアン・プット・オプション価格が求まることを確認した．
- 多期間に拡張した場合に，ヨーロピアン・オプション価格の決定公式としての CRR 公式を導いた．
- CRR 公式を導く過程から，各証券価格の割引過程が同値マルチンゲール測度をもつことを示した．

さて，無裁定条件から各証券価格の割引過程が同値マルチンゲール測度をもつことが導かれる．逆も成立することもわかる．なぜなら，割引過程の同値マルチンゲール測度の存在は，証券価格決定における状態請求権価格の存在と同値だからである.（自らこれまでの議論を整理してみよ.）

ここでは，厳密な証明をおこなわないが，一般の多期間モデルにおいて，各金融商品価格の割引過程が同値マルチンゲール測度をもつことと，証券市場が無裁定であることが，同値になる．

次の章では，2 項モデルにおける取引期間を細分化した 2 項モデルの極限として，連続型のヨーロピアン・オプション価格決定のモデルとして Black–Scholes モデルが得られることを示す.