経済の潜在生産能力

1　潜在生産能力の決定因

1.1　生産可能性曲線

生産の制約条件

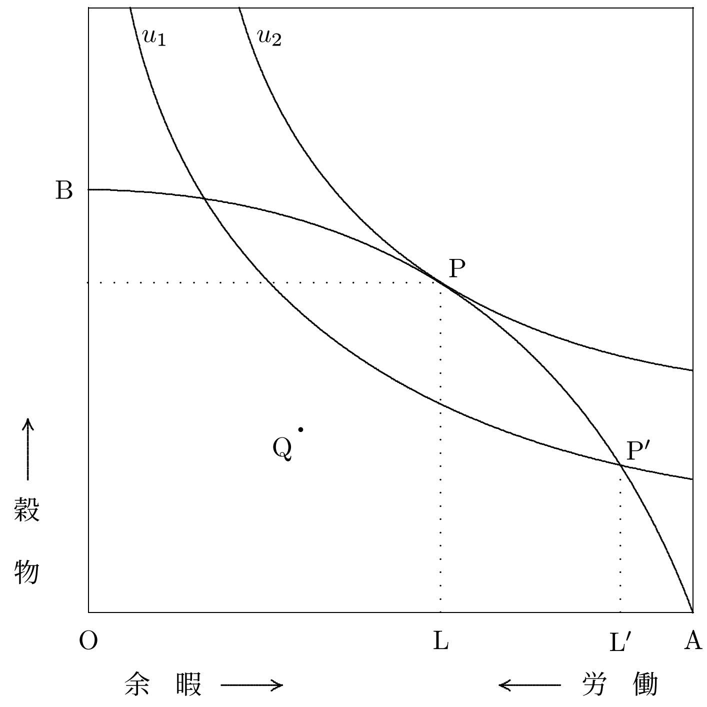
資源：　天然資源　労働力　人的資本　資本ストック（固定資本と在庫）

技術

資源の最適配分　限界代替率の均等条件

1.2　生産能力の有効利用

これは穀物のみを生産し消費する農業経済の例である．労働以外の生産要素すなわち生産に必要な財，用役の投入量は，すでに定まっているものとする．はじめに，時間の経過の中で生産と消費が繰り返される再生産過程ではなく，一回限りの生産と消費を考える．



消費可能性曲線　曲線 AB は生産可能性曲線である．この曲線は労働投入量と穀物生産量の関係（生産関数）から導かれる．**収穫逓減の法則**により，この曲線は上に凸になる．穀物も余暇も直接の消費対象であることから，このような場合，生産可能性曲線は**消費可能性曲線** consumption possibility curve でもある．扇形の図形 OAB の内部の点が示すすべての組み合わせが消費可能である．その意味で，曲線 AB を消費可能性前線 consumption possibility frontier とよぶことも

ある．この図で，OA は消費者が余暇と労働に使える時間の総計．これは一定であると考えてよい．消費者が LA だけ労働をすると余暇の消費は OL，また L′A だけ労働をすると余暇の消費は OL′ である．

余暇と労働への時間の最適配分　消費可能の範囲で，消費者の効用が最大になるような余暇と労働への時間の配分が最適な配分である．図では点 P が消費可能の範囲で効用を最大にする余暇と穀物の消費の組み合わせである．それに対応する点 L が余暇と労働の最適な時間配分を示す．点 P′，点 Q などが示す配分は，消費可能の範囲で消費者の効用が最大になっていないから，最適ではない．

最適な資源配分を定める点 P では，消費可能性曲線の傾きと無差別曲線の傾きが一致している．これは，余暇と穀物のあいだの消費の限界代替率と生産の限界代替率とが等しいということである．このような限界代替率の均等条件が，最適な資源配分の一般的な特徴である．

2　潜在生産能力の成長

貯蓄が大きいほど資本蓄積は速く，潜在的生産能力の増大も速い．しかし他の条件が同じであれば，貯蓄が大きいほど現在の消費は小さくなる．したがって，経済にとって貯蓄が大きいほどよいとは一概にいえない．では，適度な貯蓄はどのように定まるのであろうか．効用の概念を用いて，その問題をつぎに考えよう．

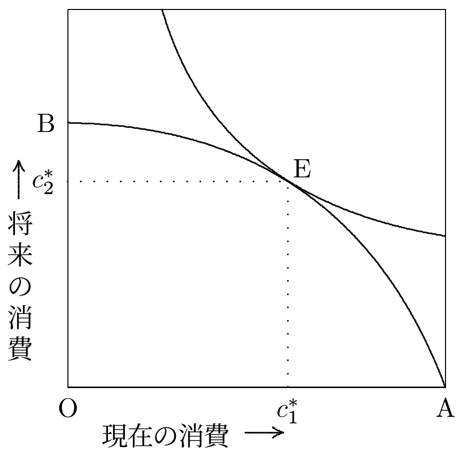
2.1　２期間の問題

消費可能性　一つの消費財のみが生産され消費される経済を考えよう．はじめに２期間の問題を考え，２期間の消費の可能性がどのように定まるかを見よう．

$$c_2 = f(z), \quad y = c_1 + z$$

$$c_2 = f(y - c_1)$$

効用最大化



社会の効用関数を $u(c_1, c_2)$ として，u の値が最大になる貯蓄の大きさを考える．最大化の問題をまとめておくと

$$\max_{c_1, c_2} u(c_1, c_2), \quad f(y - c_1) - c_2 = 0$$

この問題のラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = u(c_1, c_2) + \lambda[f(y - c_1) - c_2]$$

したがって，つぎの最大化の必要条件が得られる．

$$u_1 - \lambda f'(y - c_1) = 0, \quad u_2 - \lambda = 0, \quad f(y - c_1) - c_2 = 0$$

これを分かりやすい形に書き直すと

$$\frac{u_1}{u_2} = f'(z), \quad c_2 = f(z), \quad z = y - c_1$$

この最適条件を簡単に導き出すことも出来る．期間１の消費を１単位減らすと，期間１の効用は u_1 減りストックの蓄積は１単位増える．ストックの蓄積が１単位増えるために，期間２の消費は f' 増え，したがって期間２の消費から得られる効用は $u_2 f'$ 増える．もし最大化が実現していれば，このような効用の増減は釣り合っていなければならない．したがって，最大化の必要条件は $u_1 = u_2 f'$ となる．

限界代替率逓減の法則の下では，必要条件を満たす解があれば，それは最適解である．

2.2　多期間の問題

問題の提示　T 期にわたる計画を考えよう．２期間の理論と同様，一財の世界を考える．この社会の消費を c，次期の生産のための財のストックを k，各期の効用関数を $u(c)$，心理的割引因子を β，計画期間終了時に残っている財のストックの効用関数を $S(k)$ とする．そのとき，1 期から T 期にわたる社会の効用の総和は

$$\sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) + S(k_T) \tag{1}$$

となる．一方，t 期の生産関数を $y_t = f(k_{t-1})$，ストックの増加を z_t，資本減耗率を δ とすると，$y_t = c_t + z_t$，$k_t = z_t + (1 - \delta)k_{t-1}$ であることから，ストックの増加はつぎの条件に服することになる．

$$f(k_{t-1}) - c_t = k_t - (1 - \delta)k_{t-1}, \quad t = 1, 2, \cdots, T, \quad k_0\text{は歴史与件} \tag{2}$$

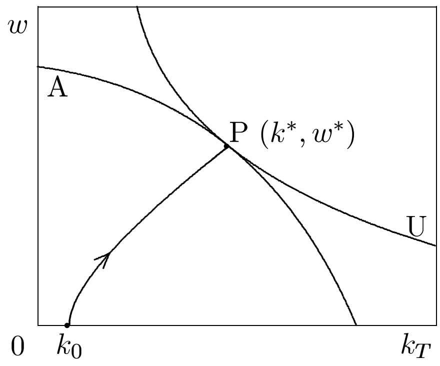
そこで問題は，$\{c_1, c_2, \cdots, c_T\}$ を適当に定めて (1) を最大にすることである．

この問題の解を図によって示そう．いま，T 期にわたる消費からの効用の総和を w とする．すなわち

$$w = \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t)$$

である．図では，横軸に期間 T，計画終了後の財のストック k_T を，縦軸に期間 T までの消費からの効用の総和 w を測ることとする．曲線 A は，初期において財のストックが k_0 であった経済が，T 期間のうちに達し得る k_T と w の組み合わせの最大限を表している．そして曲線 U は，計画終了時の社会の無差別曲線の一つを表している．最適貯蓄の問題は，曲線 A およびその左下方の領域に終点をもつ径路のうち，最も高い無差別曲線上に終点をもつ径路を見つけることである．この範囲に終点のある径路のうち，最も高い無差別曲線に達する径路の終点が曲線 A 上にな

ければならないことは明らかであろう．したがって，最適径路の終点は，曲線 A と無差別曲線の接点 P によって示すことが出来る．



最初の２期間の条件　解の性質を詳しく調べるために，この問題の最大化条件を見よう．最初の２期間について考え，見通しを立てることとする．最初の２期間の問題は，効用の値

$$u(c_1) + \beta u(c_2) + S_2(k_2) \tag{3}$$

を制約条件

$$f(k_0) - c_1 - k_1 + (1-\delta)k_0 = 0 \tag{4}$$
$$f(k_1) - c_2 - k_2 + (1-\delta)k_1 = 0 \tag{5}$$

の下で c_1，c_2，k_1，k_2 を適当に選んで最大化することである．いま c_1^*，c_2^*，k_1^*，k_2^* をこの問題の最適解であるとしよう．

　そこで，終点の資本ストック k_2^* の水準を変えないように消費の時間径路を少し変えたときの効用の変化を調べてみよう．たとえば期間 1 の消費を増やすと，期間 2 の消費を減らさなければならないであろう．実際，期間 1 の消費を a だけ増やすと，期間 2 の消費は

$$f'(k_1^*)a + (1-\delta)a = [f'(k_1^*) + (1-\delta)]a$$

だけ減らさなければならない．第１項 $f'(k_1^*)a$ は期間 2 の生産に用いられる資本ストック k_2 の減少による生産量の減少分，第２項 $(1-\delta)a$ は期間 1 に生じた資本蓄積の遅れを取り戻すために期間 2 に追加しなければならない資本蓄積量である．a が小さいとき，この変化によって生じる効用の変化はつぎのようになる．

$$u'(c_1^*)a - \beta u'(c_2^*)[f'(k_1^*) + (1-\delta)]a$$

第１項 $u'(c_1^*)a$ は期間 1 の消費の増加による効用の増加分，第２項 $\beta u'(c_2^*)[f'(k_1^*) + (1-\delta)]a$ は期間 2 の消費の減少による効用の減少分である．c_1^*，c_2^*，k_1^*，k_2^* が最適解であるならば，この効用の変化の大きさはゼロでなければならない．このことから，つぎの最適化の必要条件が得られる．

$$f'(k_1^*) + (1-\delta) = \frac{u'(c_1^*)}{\beta u'(c_2^*)}$$

あるいは

$$f'(k_1^*) - \delta = \frac{u'(c_1^*) - \beta u'(c_2^*)}{\beta u'(c_2^*)} \tag{6}$$

左辺は期間 1 の資本ストックの純限界生産力，右辺は時間の経過を通じての限界効用の減少率である．ストックの蓄積にともなって消費水準は次第に高くなり，限界効用は低くなる．この等式は，限界効用の低下の速さがそのときどきのストックの純限界生産力に等しくなければならないことを示している．

終点の資本ストック k_2 を少し増やしたときの効用の変化はどうであろうか．終点の資本ストックを b だけ増やすと，期間 2 の消費はそれと同量だけ減る．したがって，b が小さければ，この変化に伴う効用の変化はつぎのようになる．

$$-\beta u'(c_2^*)b + S_2'(k_2^*)b \tag{7}$$

第 1 項 $\beta u'(c_2^*)b$ は期間 2 の消費による効用の減少分，第 2 項 $S_2'(k_2^*)b$ は終点の資本ストックの増加による効用の増加分である．c_1^*，c_2^*，k_1^*，k_2^* が最適解であるならば，この効用の変化の大きさはゼロでなければならない．このことから，つぎの最適化のもう一つの必要条件が得られる．

$$\beta u'(c_2^*) = S_2'(k_2^*)$$

以上の結果は，ラグランジュの未定乗数方を用いて簡単に得られる．実際，制約条件 (4)，(5) の下で (3) を最大化する問題のラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) + S_2(k_2) + \lambda_1[f(k_0) - c_1 - k_1 + (1-\delta)k_0] + \lambda_2[f(k_1) - c_2 - k_2 + (1-\delta)k_1]$$

ここから，つぎの最適化の必要条件を得る．

$$\begin{aligned}
&u'(c_1) - \lambda_1 = 0, \quad \beta u'(c_2) - \lambda_2 = 0 \\
&\lambda_2[f'(k_1) + 1] - \lambda_1 = 0 \\
&S_2'(k_2) - \lambda_2 = 0 \\
&f(k_0) - c_1 - k_1 - (1-\delta)k_0, \quad f(k_1) - c_2 - k_2 - (1-\delta)k_1
\end{aligned}$$

多期間問題の解の必要条件　最初の 2 期間についての条件から，他の期間についても同様の条件

$$f'(k_t) + (1-\delta) = \frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} \quad \text{あるいは} \quad f'(k_t) - \delta = \frac{u'(c_t) - \beta u'(c_{t+1})}{\beta u'(c_{t+1})} \tag{8}$$

が成り立たなければならないことが容易に分かる．これは，連続型分析のオイラー方程式に対応する条件である．経済学の文献では，この条件をケインズ＝ラムゼイ条件とも呼ぶ．同様に，計画期間の終点ではつぎの条件が成り立っていなければならない．

$$\beta^T u(c_T) = S_k(k_T) \tag{9}$$

このこともラグランジュの未定乗数方によって確かめられる．制約条件 (2) の下で (1) を最大化する問題のラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) + S(k_T) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t[f(k_{t-1}) - c_t - k_t + k_{t-1}]$$

したがって最大化の必要条件は

$$\begin{aligned}
&\beta^t u'(c_t) - \lambda_t = 0, && t = 1, 2, \ldots, T \\
&\lambda_{t+1}[f'(k_t) + 1] - \lambda_t = 0, && t = 1, 2, \ldots, T-1 \\
&S'(k_T) - \lambda_T = 0 \\
&k_t - k_{t-1} = f(k_{t-1}) - c_t, && t = 1, 2, \ldots, T
\end{aligned} \tag{10}$$

最近の最適制御理論の用語では，最適貯蓄の径路がその終点で満たさなければならない条件

$$S'(k_T) = \lambda_T$$

を最適径路の横断条件 transversality condition という．この条件が図の曲線 A と曲線 U が接するための条件であることが確かめられる．

この条件は，k_T が負になってはならないことを考慮するとつぎのようになる．

$$S'(k_T) - \lambda_T \leq 0, \qquad [S'(k_T) - \lambda_T] \cdot k_T = 0$$

とくに，計画が期間 T で終結し，したがってどのような k_T に対しても $S(k_T) = 0$，$S'(k_T) = 0$ であるとき

$$\lambda_T \geq 0, \qquad \lambda_T \cdot k_T = 0$$

3　最適貯蓄の理論 — 連続型

3.1　ラムゼイの問題

ラムゼイの原問題の概要を示しておく．ラムゼイは，労働が効用を減らし生産を増やす効果を考え，効用関数を $u(c, l)$，生産関数を $y = f(k, l)$ としているが，ここでは省略する．ラムゼイの原問題が最近の文献に見られる問題と異なる主要な点は（1）将来の効用を割り引かないこと（2）効用の上限である至福点 bliss の存在を前提としていることである．

いま，効用の上限を B とすると，ラムゼイの問題はつぎのように書かれる．

$$\min_{\{c\},\{k\}} \int_0^\infty [B - u(c)]\, dt \tag{11}$$

$$\dot{k} = f(k) - c \tag{12}$$

この問題の最小化の目的関数を，変数変換によってつぎのように書き換えてみよう．

$$\int_0^\infty [B - u(c)]\, dt = \int_0^\infty \frac{B - u(c)}{\dot{k}} dk = \int_0^\infty \frac{B - u(c)}{f(k) - c} dk \tag{13}$$

すると問題は，k を所与として $(B - u)/(f - c)$ を c について最小化する問題に還元される．したがって，つぎの最小化の条件が容易に得られる．

$$-[B - u(c)] + u'(c)\dot{k} = 0 \tag{14}$$

これを見やすい形に書き直せば

$$\dot{k} = \frac{B - u(c)}{u'(c)} \tag{15}$$

要するに，資本蓄積の速さと限界効用の積が，その時点の効用と至福水準との差に等しくなければならない．

ラムゼイは，この条件をケインズが示唆したという．確かに，問題をこのように作れば，最適条件がどのようになるかは容易に見当がつく．ラムゼイが紹介するケインズの簡単な推論とはつぎのようなものである．経済が一つの蓄積径路上，ある段階で，１期間当り c の率で消費をし z の率で蓄積をしているとしよう．その段階で，いま，消費を１期間当り１単位増やすと，現在の

効用は $u'(c)$ だけ増える．一方，至福点に達するのが約 $1/z$ 期間遅れる．なぜなら，消費を１単位増やさなければ１期間当り z の蓄積が出来たが，消費を増やしたために，１期間当りの蓄積は $z-1$ に減るからである．z だけの蓄積をするのに要する時間を h とすると $(z-1)h = z$ であるから $h = z/(z-1)$ である．したがって至福点へ到達までの遅延は

$$h - 1 = \frac{1}{z-1} \approx \frac{1}{z}$$

この段階で，至福点との効用の差は $B - u(c)$ であるから，遅延による将来効用の損失は

$$\frac{B - u(c)}{z}$$

である．もし経済が最適蓄積径路上にあるならば，この変更による現在効用の増加と将来効用の減少は等しくなっていなければならない．したがってつぎの最適条件を得る．

$$u'(c) = \frac{B - u(c)}{z}$$

3.2　一般的な問題

最後に，参考までに，経済学によく出てくる動的計画の一般的な形式を示しておく．

$$\max_{\{v\}} \int_0^T \beta(t)u[x(t), v(t), t]dt + S[x(T)] \tag{16}$$

$$\dot{x} = f[x(t), v(t), t] \tag{17}$$

ここで x は，貯蓄の問題における k に対応し，状態変数と呼ばれ，v は，貯蓄の問題における消費に対応し制御変数と呼ばれる．問題は，$v(t)$ の時間径路を決めることをとおして状態変数を制御し，目的関数の値を最大化することである．

次式は，この問題を解くためのハミルトン関数またはハミルトン形式と呼ばれる．

$$H = \beta(t)u[x(t), v(t), t] + \lambda f[x(t), v(t), t]$$

ハミルトン形式を用いると，最適解の必要条件はつぎのように表現される．

$$H_v[x(t), v(t), \lambda(t), t] = 0 \tag{18}$$

$$\dot{\lambda} = -H_x[x(t), v(t), \lambda, t] \tag{19}$$

$$\lambda(T) = S'[x(T)] \tag{20}$$

現代マクロ経済学では，この形式の問題が，社会の最適を求める問題だけではなく，市場経済における家計の消費行動および企業の投資行動の分析にもしばしば応用される．

参考文献

Olivier J. Blanchard and Stanley Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics.* Cambridge, Massachusetts: MIT Press. Chapter 2.

Kenneth J. Arrow and Mordecai Kurz (1970) *Public Investment, the Rate of Return and Optimal Fiscal Policy.* Baltimore: Johns Hopkins Press.

Frank P. Ramsey (1928) “A Mathematical Theory of Saving.” *Economic Journal* 38: 543–549.

鬼木　甫（1980）「数理経済学 II」『経済学大辞典 III』東京：東洋経済新報社

資　料

rate of saving multiplied by marginal utility of consumption should always equal to bliss minus actual rate of utility enjoyed.　Ramsey (1928), p. 547.

付　録

労働と余暇の選択を考慮した場合の問題と最適条件

離散型２期間問題

$$\text{最大化の目的：}\quad \max_{c_1,c_2,x} u(c_1,c_2,x) \tag{1}$$

$$\text{制約条件：}\quad c_2 = f(\bar{y}-c_1, a-x) \tag{2}$$

最適条件

1. 補助変数による表現

$$u_1 - \lambda f_z = 0, \quad u_2 - \lambda = 0, \quad u_x - \lambda f_l = 0, \quad f(\bar{y}-c_1, a-x) - c_2 = 0 \tag{3}$$

2. 補助変数によらない表現

$$\begin{aligned} &\text{同時条件} \quad \frac{u_x}{u_2} = f_l \\ &\text{通時条件} \quad \frac{u_1}{u_2} = f_z \\ &\text{技術制約} \quad f(\bar{y}-c_1, a-x) - c_2 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

離散型多期間問題

$$\text{最大化の目的：}\max_{\{c_t\},\{x_t\}} \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t,x_t) + S(k_T) \tag{5}$$

$$\text{制約条件：}\quad k_t - k_{t-1} = f(k_{t-1}, a-x_t) - c_t, \quad t = 1,2,\ldots,T \tag{6}$$

最適条件

1. 補助変数による表現

$$\begin{aligned} &\beta^t u_c(c_t,x_t) = \lambda_t, && t=1,2,\ldots,T \\ &\beta^t u_x(c_t,x_t) = \lambda_t f_l(k_{t-1}, a-x_t), && t=1,2,\ldots,T \\ &\lambda_{t+1}[f_k(k_t, a-x_t)+1] - \lambda_t = 0, && t=1,2,\ldots,T-1 \\ &S'(k_T) = \lambda_T \\ &f(k_{t-1}, a-x_t) - c_t - k_t + k_{t-1}, && t=1,2,\ldots,T \end{aligned} \tag{7}$$

2. 補助変数によらない表現

$$\begin{aligned} &\text{同時条件} \quad \frac{u_x(c_t,x_t)}{u_c(c_t,x_t)} = f_l(k_{t-1}, a-x_t), && t=1,2,\ldots,T \\ &\text{通時条件} \quad \frac{u_c(c_t,x_t)}{\beta u_c(c_{t+1},x_{t+1})} - 1 = f_k(k_{t-1}, a-x_t), && t=1,2,\ldots,T-1 \\ &\text{終端条件} \quad \beta^T u_c(c_T,x_T) = S'(k_T) \\ &\text{技術制約} \quad f(k_{t-1}, l_t) - c_t - k_t + k_{t-1} = 0, && t=1,2,\ldots,T \end{aligned} \tag{8}$$

付　録 2

最終資本ストックと総効用　期間 1 から期間 T まで T 期間にわたる計画で消費の時間径路を $\{c_t\}$ に定めると，資本ストックは k_0 を初期条件として，制約条件

$$f(k_{t-1}) - k_t + k_{t-1} = c_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T \tag{1}$$

にしたがって成長し，計画終了時までの総効用は

$$w = \sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) \tag{2}$$

となる．いま，最終端資本ストック k_T を任意に定めたとき，達成し得る総効用の最大限 w^* は明らかに k_T の減少関数である．そこで，終端資本ストック k_T を増やしたとき，その増分 1 単位あたりの w^* の減少分の大きさはどれだけになるかを考えよう．

まず，w を最大にする有効径路は，つぎの条件を満たさなければならないことに注意しよう．

$$\lambda_t = \beta^t u'(c_t), \quad t = 1, \ldots, T \tag{3}$$

$$1 + f'(k_{t-1}) = \frac{\lambda_{t-1}}{\lambda_t} \tag{4}$$

つぎに (1) から k_t，c_t などの k_T に関する変化率の関係を見ると

$$[1 + f'(k_{t-1})] \frac{dk_{t-1}}{dk_T} - \frac{dk_t}{dk_T} = \frac{dc_t}{dk_T}, \quad t = 1, 2, \ldots, T \tag{5}$$

したがって (4) から

$$\lambda_{t-1} \frac{dk_{t-1}}{dk_T} - \lambda_t \frac{dk_t}{dk_T} = \lambda_t \frac{dc_t}{dk_T}, \quad t = 1, 2, \ldots, T \tag{6}$$

ただしここで

$$\frac{dk_0}{dk_T} = 0, \quad \frac{dk_T}{dk_T} = 1$$

である．このことを考慮して (6) を辺々たしあわせると

$$-\lambda_T = \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \frac{dc_t}{dk_T} \tag{7}$$

そこで (3) を考慮すると

$$-\beta^T u'(c_T) = \sum_{t=1}^{T} \beta^t u'(c_t) \frac{dc_t}{dk_T} \tag{8}$$

右辺は dw/dk_T にほかならない．したがって

$$-\frac{dw}{dk_T} = \beta^T u'(c_T)$$