$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \cdots \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行基本変形

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} ; A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$= \mathrm{Ker}(A)$ Aの核 (kernel)

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_4 \quad (A\vec{v}_1 = A\vec{v}_2 = \vec{0})$

$$A(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2)$$

$$= c_1 \underbrace{A\vec{v}_1}_{=\vec{0}} + c_2 \underbrace{A\vec{v}_2}_{=\vec{0}} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

[illegible]

$$\rightsquigarrow \quad c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \in V_4 .$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3z - w = 0 \\ y - 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

$\left. \begin{array}{l} z = \alpha \\ w = \beta \end{array} \right\}$ とおく

$$x = -3\alpha + \beta$$
$$y = 2\alpha - 2\beta$$
$$z = \alpha$$
$$w = \beta$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha + \beta \\ 2\alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\in V_4$

V_4 は $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\quad\ \ \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4) \qquad\qquad (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$$

$$V_5 = \left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} ;\ x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$= \left\{ x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4 ;\ x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

部分空間. $A\vec{v}_1,\ A\vec{v}_2 \in V_5$

$$c_1 A\vec{v}_1 + c_2 A\vec{v}_2 = A(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) \in V_5$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ で生成されている.

実は $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ で生成されることがわかる.

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2$$

$$\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2$$

補題 ① 行基本変形 = 基本行列を左からかける.

② 基本行列は正則

$B = \underbrace{P_\ell \cdots P_1}_{P\ \text{とおく.}} A$ $P_1, \cdots, P_\ell$: 基本行列.

$P = P_\ell \cdots P_1$ 正則

$\boxed{B = PA} \longrightarrow$

$$(\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3\ \vec{b}_4) = P(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4)$$

$$= (P\vec{a}_1\ P\vec{a}_2\ P\vec{a}_3\ P\vec{a}_4)$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{b}_j = P\vec{a}_j \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

$$\vec{b}_3 = 3\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 \rightsquigarrow \vec{a}_3 = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2$$

$$\vec{b}_4 = -\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 \rightsquigarrow \vec{a}_4 = -\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$$

$$\longrightarrow P\vec{a}_3 = 3P\vec{a}_1 - 2P\vec{a}_2$$

両辺に左から P^{-1} をかける

$$\underbrace{P^{-1}P}\vec{a}_3 = P^{-1}3P\vec{a}_1 - P^{-1}2P\vec{a}_2$$

$$\boxed{\vec{a}_3 = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2}$$

$$V_5 \ni s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + s_3\vec{a}_3 + s_4\vec{a}_4$$

$$= s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + s_3(3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2) + s_4(-\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2)$$

$$= (s_1 + 3s_3 - s_4)\vec{a}_1 + (s_2 - 2s_3 + 2s_4)\vec{a}_2$$

$$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \xrightarrow{\quad} \cdots \xrightarrow{\quad} B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3)$$

行基本変形

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2$$

$B = P_k \cdots P_1 A$ $\qquad P_i$: 基本行列

$(\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3) = P(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ $\quad P = P_k \cdots P_1$ 正則

$$\rightsquigarrow \quad P\vec{a}_j = \vec{b}_j$$

$$\rightarrow \quad \vec{a}_3 = -\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$$

$$V_3 \ni s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + s_3\vec{a}_3$$

$$= s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + s_3(-\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2)$$

$$= (s_1 - s_3)\vec{a}_1 + (s_2 + 2s_3)\vec{a}_2$$

V_3 は $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ で生成される.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 10 & 6 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -17 & 11 \end{pmatrix}$$

$$V_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} ; A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

を生成するベクトルを求めよ.

$V_{11} = \{ A\vec{v} ; \vec{v} \in \mathbb{R}^5 \}$ を生成するベクトルは何か?

定理3.3. 次は同値　A: n次正方行列

(1) A: 正則

↓

(2) $A\vec{x} = \vec{b}$ の解は一意的に存在.

(全ての $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$)

↓

(3) A: rank n.

---

(3) ⇒ (1)　既に示している.

$$(A \mid E_n) \to \cdots \to \left(\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \,\middle|\, B\right)$$

を使って示した.

---

(1) ⇒ (2)

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

だから A^{-1} をかける　$\underbrace{A^{-1}A}_{=E_n}\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$= \vec{x}$

---

(2) ⇓ (3)　定理3.2.

$A\vec{x} = \vec{b}$ の解が一意的に存在

⇔ 変数の個数 = A の階数

~~A … = 変数の個数~~

$n = \mathrm{rank}(A)$

$\boxed{\text{定理3.4}}$

$A\vec{x}=\vec{0}$ $\boxed{A: m\times n}$

同次方程式

(斉次)

$A\vec{0}=\vec{0}$ だから $\vec{x}=\vec{0}$ は解

(自明解)

$A: m\times n$ $\boxed{\text{変数の個数} = n}$

非自明解が存在する $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) < n$.

~~$(A \mid \vec{0})$~~

パラメーターの個数 = 変数の個数 − ピボットの数

自明解しかない $\Longleftrightarrow$ パラメーターの個数 = 0

$\Longleftrightarrow$ $n = \mathrm{rank}(A)$

自明解でない解あり $\Longleftrightarrow$ $n > \mathrm{rank}(A)$

↑

パラメーターの個数 > 0

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -9 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{1행 \times (-4) \\ 3행에 더함}]{\substack{1행 \times (-2) \\ 2행에 더함}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & -5 & 15 & -4 \\ 0 & -5 & 15 & -7 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -) & 2 & 4 & -12 & 6 \\ \hline & 0 & -5 & 15 & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 4 & 3 & -9 & 5 \\ -) & 4 & 8 & -24 & 12 \\ \hline & 0 & -5 & 15 & -7 \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{3행에 더함}]{\text{2행}\times(-1)\text{을}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & -5 & 15 & -4 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-3} \end{array}\right)$$

$\mathrm{rank}(A) = 2$

$\wedge$

$\mathrm{rank}(A \mid \vec{b}) = 3$

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -3$

[illegible] $0 = -3$

∴ 불능

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{0} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{4行に+}]{\text{2行×(−1)を}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{1行を 3行に+}]{\text{1行×(−2)を 2行に+}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{2行と3行を交換}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3行に+}]{\text{2行×2を}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{3行を1行に+}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{1行に+}]{\text{2行×(−2)を}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -) & 2 & 4 & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 0 & -2 & 1 & -3 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ +) & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 0 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ +) & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -) & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$$

パラメーターの数 $\left\{\begin{array}{l} x_1 \qquad\quad - x_4 = -1 \\ \quad x_2 \quad + x_4 = 2 \\ \qquad x_3 - x_4 = 2 \end{array}\right.$

= 変数の個数 − 係数行列の階数

$= 4 - 3 = 1$

$x_4 = \alpha$ とおく.

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha - 1 \\ x_2 = -\alpha + 2 \\ x_3 = \alpha + 2 \\ x_4 = \alpha \end{array}\right.$$ を得る

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{100} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られる(生成される)

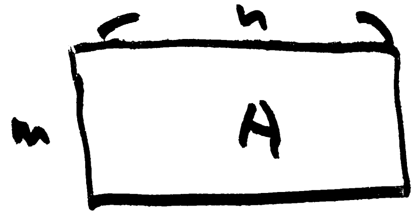
$$V_{101} = \left\{ A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4)$$

$\longrightarrow$ V_{101} は $\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3$ で生成 する

$$\left(\vec{a}_4 = \cancel{\beta} \quad \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 \right)$$

系



$$\mathrm{rank}(A) \leq m < n \qquad m < n$$

$m<n$　$A: m\times n$ のとき.

$A\vec{x}=\vec{0}$ は 非自明解あり

問題

$$\begin{cases} x-4y+7z=a \\ 3y-5z=b \\ -2x+5y-9z=c \end{cases}$$

が解を持つための a,b,c の関係式

$$\begin{cases} x+2y+z+3w=-2 \\ 4x-y-5z-6w=a \\ 2x+y-z=b \end{cases}$$

が解をもつ必要十分条件を求めよ
解があるときは解を求めよ

解をもつ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A|\vec{b})$

$$\begin{cases} x+2y-3z-4w=1 \\ 2x+9y-z+2w=-3 \\ y+z+2w=-1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc \quad A\text{の行列式}$$

$$\det(A) = |A|$$

determinant

---

① $\det(A) \neq 0 \iff A$：正則.

② $\iff A$: rank 2

$\det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$ クラメールの公式.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

クラメール.

$\det(A) \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & c \\ q & d \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ b & q \end{vmatrix}}{|A|}$$

3次の行列式

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

偶順列

$$\boxed{\begin{matrix}(1\ 2\ 3)\\(2\ 3\ 1)\\(3\ 1\ 2)\end{matrix}}$$

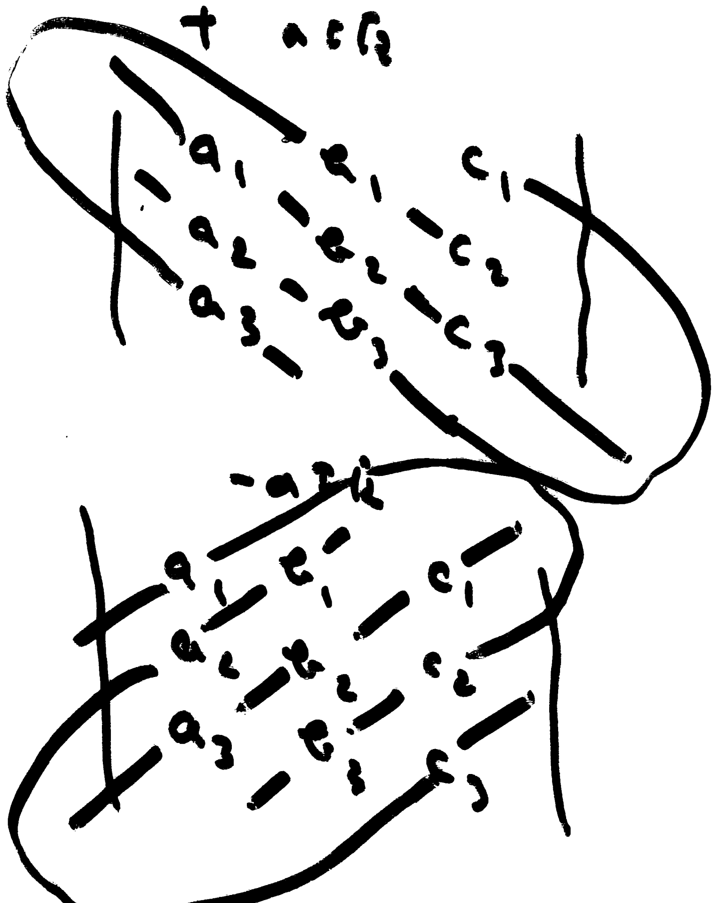
$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2$$

$$- a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

(サラスの公式)

$$\boxed{\begin{matrix}(1\ 3\ 2)\\(2\ 1\ 3)\\(3\ 2\ 1)\end{matrix}}$$

奇順列



$(2\ 3\ 1) \longrightarrow (2\ 1\ 3) \longrightarrow (1\ 2\ 3)$

2 12

$(3\ 1\ 2) \longrightarrow (1\ 3\ 2) \longrightarrow (1\ 2\ 3)$

2 12

$(1\ 3\ 2) \longrightarrow (1\ 2\ 3)$ 1 12

$(2\ 1\ 3) \longrightarrow (1\ 2\ 3)$ 1 12

$(3\ 2\ 1) \longrightarrow (1\ 2\ 3)$ 1 12

$\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1} \rightarrow \cdots \rightarrow \boxed{1 \mid 2}\boxed{3}$

Ⅰ 各列に関して線形

$$\det(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$$

2列と3列も同様.

$$\det(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

2列 3列も同様.

Ⅱ 交代性

(相異なる2列が等しいとき0)

例 $\det(\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{b}) = 0$

Ⅲ $\det(E_3) = 1$ $\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

Ⅳ 相異なる2列を交換すると(−1)倍

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

Ⅰ $\det(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) = 0$ by Ⅱ

$= \det(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) + \det(\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{c})$

$0 = \boxed{\det(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c})} + \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$+ \det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) + \boxed{\det(\vec{b}, \vec{b}, \vec{c})}$

$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) + \det(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = 0$

$\rightarrow \quad \det(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

(V) i列のλ倍をj列に加えることで行列式の値は変わらない

$$\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \det(\vec{a}\ \ \vec{b}+\lambda\vec{a}\ \ \vec{c})$$

$$\text{To} \underset{\text{(I)}}{=} \det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) + \lambda \underbrace{\boxed{\det(\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{c})}}_{=0}$$

$$= \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = T_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 11 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr} & -5 & 3 & -1 \\ +) & 5 & 5 & 5 \\ \hline & 0 & 8 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & -10 & 1 & -2 \\ +) & 10 & 10 & 10 \\ \hline & 0 & 11 & 8 \end{array}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 8 & 11 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \times 8 - 4 \times 11$$

$$= 64 - 44$$

$$= 20$$

公式（余因子展開の特殊な形）

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \boxed{a} & \boxed{b} \\ \gamma & \boxed{c} & \boxed{d} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

（すべての公式では同様です）

公式

$$\begin{vmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ * & \beta & 0 \\ * & * & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

（1列 × (−2) を2列に+
1列 × (−3) を3列に+）

$$\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 4 \\ -2\,\ 2 & 10 & 0 \\ \hline 0 & -10 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 3 & 1 & 6 \\ -3\,\ 3 & 15 & 0 \\ \hline 0 & -14 & 6 \end{array}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -10 & -14 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times \begin{vmatrix} -10 & -14 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -\{(-10)\times 6 - 4\times(-14)\}$$

$$= -(-60+56)$$

$$= -(-4) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix}$$

1행×(−2)를 2행에 더+

1행×(−3)를 3행에 더+

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 4 & 2 \\ -) & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 2 & 1 \\ -) & 3 & 6 & 9 \\ \hline & & -4 & -8 \end{array}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \times (-8) - (-4)(-4)$$

$$= -0 - 16$$

$$= -16$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 10 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

4

$$3\begin{vmatrix} 1 & 10 & 5 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

112 page

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdots$$