

# 接平面 (Tangent Plane)

Nobuyuki TOSE

October 04, 2017  
V03 October 3, 2019

## 平面の方程式

点  $P_0$  を通り  $\vec{n} (\neq \vec{0})$  に垂直な平面  $\alpha$  を考えます.  $\alpha$  の任意の点  $P$  に対して

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

が成立します.  $P_0$  の座標が  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $P$  の座標が  $(x, y, z)$ ,

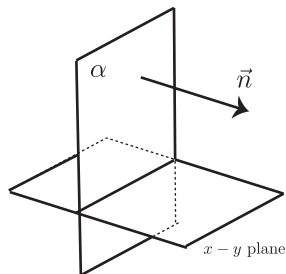
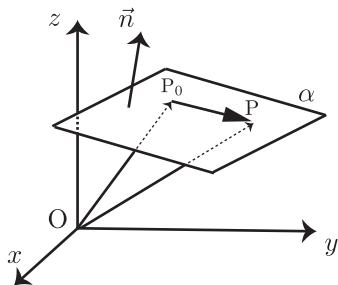
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{であるとき} \quad \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

であるので, 上の条件は座標を用いると

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

# The Equation of a plane

$\vec{n}$ のことを平面の法線ベクトル (normal vector) と呼びます.

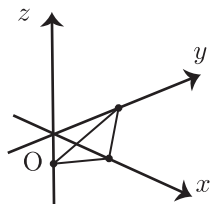


# 具体例

$$x + y - 2z = 2$$

について考えます。通る点を具体的に求めます。

$$\begin{array}{ll} x \text{ 切片} & (2,0,0) \\ y \text{ 切片} & (0,2,0) \\ z \text{ 切片} & (0,0,-1) \end{array}$$

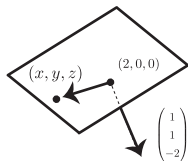


(2,0,0) を通ることから

$$\begin{array}{rcccccl} & x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ -) & 2 & + & 0 & - & 2 \cdot 0 & = & 2 \\ \hline & (x-2) & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

すなわち

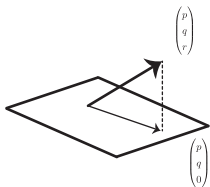
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$



## In case $r = 0$

$r = 0$  の場合  $\vec{n}$  は  $x - y$  平面に平行になり，平面  $\alpha$  は  $x - y$  平面に垂直になります．

$$r = 0 \Rightarrow \vec{n} \parallel x - y \text{ 平面}, \quad \alpha \perp x - y \text{ 平面}$$



# 偏微分 (復習)

2変数関数

$$z = f(x, y)$$

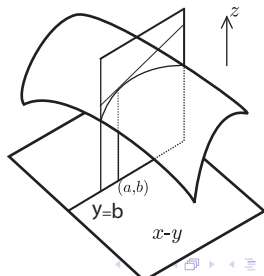
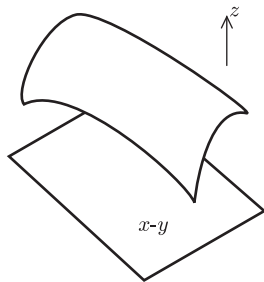
に対して  $x$  の関数

$$F(x) := f(x, b)$$

を考えて,  $(a, b)$  における  $x$  に関する  
偏微分係数

$$f_x(a, b) = F'(a)$$

を定義します.



# Tangent Plane

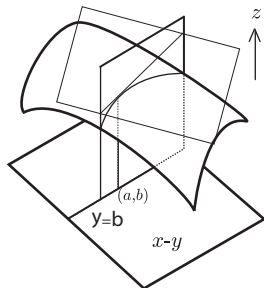
関数  $f(x, y)$  のグラフ

$$z = f(x, y)$$

の  $(a, b, f(a, b))$  における接平面を求めます. そのために

$$z = A(x - a) + B(y - b) + f(a, b) \quad (1)$$

の係数  $A, B$  を求めます.



## Tangent Plane (2)

接平面と切断面  $y = b$  との交わりは、切断面の上では  $z = F(x)$  の  $x = a$  における接線となります。さらに (1) に  $y = b$  を代入して切断面  $y = b$  上に制限すると

$$z = A(x - a) + f(a, b)$$

となります。これからこの直線の傾きが  $A$  であることが分かり、

$$A = F'(a) = f_x(a, b)$$

であることが分かります。同様に

$$B = f_y(a, b)$$

となりますから、結局、接平面は方程式

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

で表されます。



# 例

関数

$$z = f(x, y) = 4x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

を  $(x, y) = (a, b) = (10^4, 625)$  の周りで考えます. 関数  $f$  の偏導関数は

$$f_x(x, y) = 3x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}, \quad f_y(x, y) = x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}$$

となりますから, 偏微分係数は

$$f_x(10^4, 625) = 1.5, \quad f_y(10^4, 625) = 8$$

と計算されます. 従って  $(x, y) = (10^4, 625)$  における接平面は

$$z = 1.5(x - 10^4) + 8(y - 625) + 2.0 \times 10^4$$

であることが分かります.

## 限界生産物 (Marginal Products)

資本 (Capital) の投入量が  $K$ , 労働 (labor) の投入量が  $L$  の生産関数

$$Q = f(K, L)$$

を考えます. このとき  $(K, L) = (K_0, L_0)$  の周りで  $Q$  は接平面を用いて

$$\begin{aligned} Q &\approx f_K(K_0, L_0)(K - K_0) + f_L(K_0, L_0)(L - L_0) + f(K_0, L_0) \\ &= f_K(K_0, L_0)\Delta K + f_L(K_0, L_0)\Delta L + f(K_0, L_0) \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \Delta Q &= Q - Q_0 = f(K, L) - f(K_0, L_0) \\ &\approx f_K(K_0, L_0)\Delta K + f_L(K_0, L_0)\Delta L \end{aligned}$$

と近似します (これを **1**次近似と呼びます).

## 限界生産物 (Marginal Products)

$\Delta L = 0$  すなわち  $L = L_0$  のとき

$$\Delta Q = f(K_0 + \Delta K, L_0) - f(K_0, L_0) \approx f_K(K_0, L_0) \cdot \Delta K$$

が成立します。このとき

$$MPK = F_K(K_0, L_0)$$

を  $(K, L) = (K_0, L_0)$  における資本の限界生産物 (**Marginal Product of Capital**) (MPK) と呼びます。

## 限界生産物 (Marginal Products)

具体的に Cobb-Douglass 型の生産関数

$$Q = F(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$$

を  $(K, L) = (K_0, L_0) = (10^4, 625)$  の周りで考えます。

$$F_K(K, L) = 4 \cdot \frac{3}{4} K^{-\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}} = 3K^{-\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}$$

$$F_L(K, L) = 4 \cdot \frac{1}{4} K^{\frac{3}{4}} L^{-\frac{3}{4}} = K^{\frac{3}{4}} L^{-\frac{3}{4}}$$

と偏導関数を計算します。

$$(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha-1}$$

## 限界生産物 (Marginal Products)

このとき  $(K_0, L_0) = (10^4, 625)$  における資本の限界生産物 (MPK) と労働の限界生産物 (**Marginal Product of Labor**) (MPL) は

$$MPK = F_K(K_0, L_0) = \frac{3 \cdot 5}{10} = 1.5$$

$$MPL = F_L(K_0, L_0) = \frac{10^3}{5^3} = 8$$

となります。さらに  $Q = F(10^4 + 100, 625) = 20,149.813\dots$  の値の近似を

$$\begin{aligned} F(10^4 + 100, 625) &\approx F(10^4, 625) + F_K(10^4, 625) \cdot 100 \\ &= 20,000 + 1.5 \times 100 = 20,150 \end{aligned}$$

と計算します。

# 曲線の接線

曲線  $C$  が 2 変数関数  $g$  を用いて

$$g(x, y) = 0$$

と与えられているとします。例えば単位円は

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

と表されます。  $C$  上の点  $P_0(a, b)$  が与えられているときに、  $C$  の  $P_0(a, b)$  における接線を求めます。

# 曲線の接線-3次元的には

曲面

$$z = g(x, y)$$

の接平面を  $(a, b, 0)$  で考えると

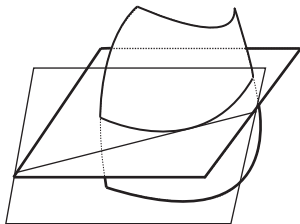
$$z = g_x(a, b) \cdot (x - a) + g_y(a, b) \cdot (y - b) \quad (2)$$

となります。

接平面と  $x - y$  平面の交わりは  $x - y$  座標では

$$g_x(a, b) \cdot (x - a) + g_y(a, b) \cdot (y - b) = 0$$

となります。これは接線の方程式となります。



# Gradient Vector

方程式 (2) は内積を用いて

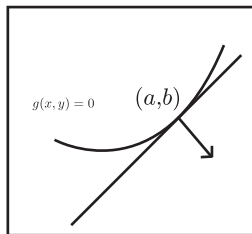
$$\begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = 0$$

と表されます。

これからベクトル

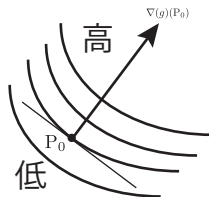
$$\nabla(g)(a, b) := \begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix}$$

が接線に垂直であることが分かります。  $\nabla(g)(a, b)$  を  $g$  の  $(a, b)$  における勾配ベクトル (**gradient vector**) と呼びます。





## Gradient Vector — その向きは？



勾配ベクトルは  $g$  が大きくなる方向に向いています。登っていくときに最もきつい方向です。

# 例

単位円  $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$  について考えます.  $g$  の偏導関数は

$$g_x = 2x, \quad g_y = 2y$$

ですから, したがって単位円上の点  $(a, b)$  の接線は

$$2a(x - a) + 2b(y - b) = 0$$

となります.

## 陰関数の微分

曲線  $C$  が  $(a, b)$  の近くで  $y = \varphi(x)$  と表されていて、 $g_y(a, b) \neq 0$  が成立するとします。このとき  $(a, b)$  における接線は

$$y = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}(x - a) + b$$

となりますから、接線の傾きを考えて

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

であることが分かります。例えば曲線（単位円） $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  を  $b > 0$  を満たす  $(a, b)$  で考えると、曲線は直接的には

$$y = \varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

と表されますが、

$$\varphi'(a) = -\frac{2a}{2b} = -\frac{a}{b}$$

が成立することが分かります。

# 限界代替率 (Marginal Rate of Substitution (MRS))

消費者が商品 A,B をそれぞれ  $x, y$  購入するときの効用が効用関数  $u(x, y)$  で与えられるとします。

このとき

$$u(x, y) = u(a, b)$$

を  $(a, b)$  を通る無差別曲線 (**Indifference Curve**) と呼びます。このとき  $(a, b)$  における限界代替率 (**Marginal Rate of Substitution**) を

$$\text{MRS} = \frac{u_x(a, b)}{u_y(a, b)}.$$

と定義します。A の購入量を  $a$  から微小量  $\Delta x$  だけ効用一定の下で (無差別曲線に沿って) 増加させると,  $\text{MRS} \times \Delta x$  だけ B を減少させることになります。