Chain Rule –その直観的な理解

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

Nov, 2017
V02 Nov. 11, 2020 for CalcNT

Chain Rule

- $\mathbf{R}^2$ の開集合 U と U 上の C^1 級関数

$$f\colon\ U \longrightarrow \mathbf{R}$$

  が与えられているとします.
- U 中の微分可能な曲線

$$(A, B) \longrightarrow U \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$ があるとします.

- このとき 1 変数の関数 $F\colon\ (A, B) \to \mathbf{R}$ を

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

  と定義できます.

Chain Rule(2)

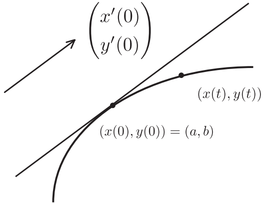
定理

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

パラメータ表示された曲線の接線方向 (1)

上で与えた曲線の $\mathrm{P}_0(a,b) = (x(0), y(0))$ における接線方向は

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$



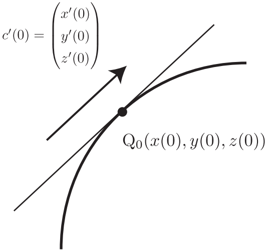
パラメータ表示された曲線の接線方向 (2)

3 次元空間中の曲線

$$c: \ (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

が与えられているとき c の $\mathrm{Q}_0(x(0), y(0), z(0))$ における接線方向は

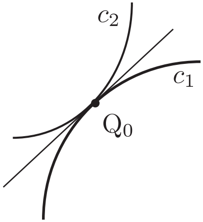
$$c'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix}$$



空間中の 2 曲線が接するとき

3 次元空間中の 2 曲線

$$c_1 : (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$$
$$c_2 : (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$



が与えられていて点 $\mathrm{Q}_0(a, b, c)$ が共有されているとします．すなわち

$$(a, b, c) = (x_1(t_1), y_1(t_1), z_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2), z_2(t_2))$$

がある $t_1, t_2 \in (A, B)$ に対して成立するとします．このとき

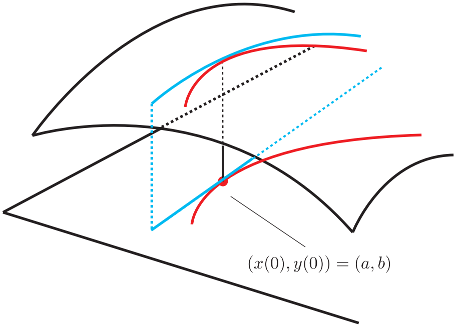
$$c_1 \text{ と } c_2 \text{ が } \mathrm{Q}_0 \text{ で接する} \Leftrightarrow C_1'(t_1) \parallel C_2'(t_2)$$

空間中の接する2曲線

空間中には曲線

$$(x(t), y(t), F(t))$$

があって，$x-y$ 平面の曲線 $(x(t), y(t))$
上を動きます.
さらに別の曲線



$$(a + x'(0)t, b + y'(0)t, f(a + x'(0)t, b + y'(0)t))$$

が接線 $(a + x'(0)t, b + y'(0)t)$ の上を動きます.
2 曲線は $(a, b, f(a, b))$ で接します.

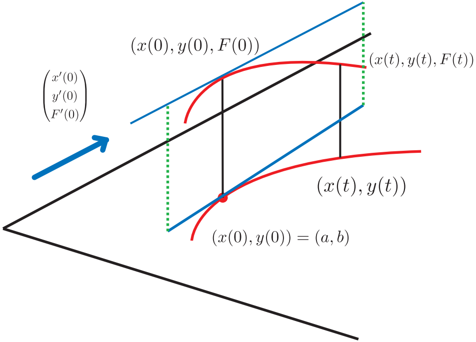
接線方向 (1)

曲線

$$(x(t), y(t), F(t))$$

の $(x(0), y(0), F(0))$ における接線方向は

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ F'(0) \end{pmatrix}$$



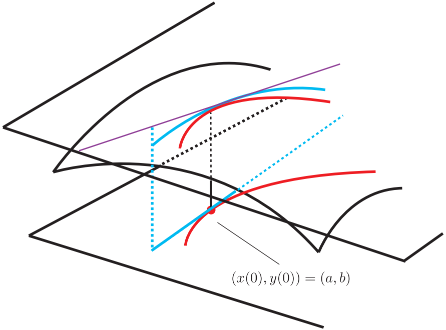
接線方向 (2)

$$G(t) = f(a + x'(0)t, b + y'(0)t)$$

とするとき，曲線

$$(a + x'(0)t, b + y'(0)t, G(t))$$

の $t = 0$ の $(a, b, f(a, b))$ における接線方向は



$$(x'(0), y'(0), f_x(a, b)x'(0) + f_y(a, b)y'(0))$$

これは方向微分にあたります.

Chain Rule

- $(x(t), y(t), F(t))$ の接線方向
$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ F'(0) \end{pmatrix}$$
と別の曲線 $(a + x'(0)t, b + y'(0)t, G(t))$ の接線方向
$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ f_x(a,b)x'(0) + f_y(a,b)y'(0) \end{pmatrix}$$
は平行です.
- 従って
$$F'(0) = f_x(a,b)x'(0) + f_y(a,b)y'(0)$$