生産関数（2 生産要素の場合）

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2011 年 5 月 (emath2011),2019 年 4 月

はじめに

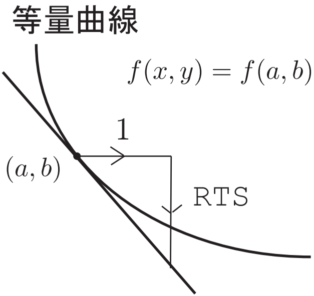
- 2 種類の生産要素を用いて生産物を 1 種類生産することを数学的に解説します.
- x と y：第 1 生産要素と第 2 生産要素の投入量
- 生産要素 (x, y) から生産される最大の生産量が

$$z = f(x, y)$$

とする． f を生産関数 (production function) と呼ぶ.

技術的限界代替率 (RTS)

- 最大生産量が同一の曲線 $f(x) = f(a)$ を等産出量曲線 (equal product curve) または等量曲線 (isoquant) と呼びます.
- 等量曲線の接線の傾き $-\frac{f_x(a)}{f_y(a)}$

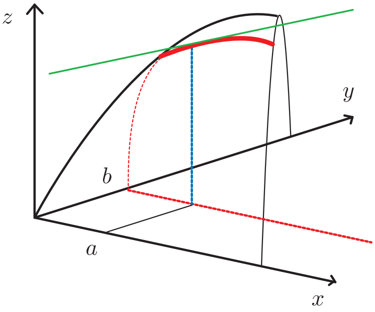


- 第 1 生産要素を 1 単位追加的に投入するとき、生産量を一定に保つためには、近似的に第 2 財を RTS 減少させる必要がある.
- RTS は技術的限界代替率 (Marginal Rate of Technical Substitution)

限界生産物 (Marginal Product)

- 第 2 生産要素の投入量をそのままにして、第 1 生産要素を微少に変化させたときの生産量の増加率を第 1 要素の限界生産物 (Mariginal Product) と呼びます.

$$MP_1 = f_x(\mathbf{a})$$

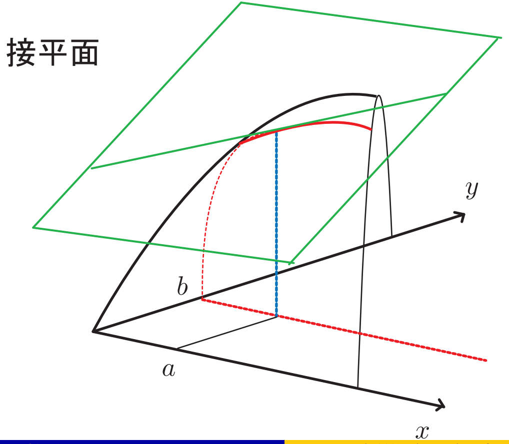


接平面

$z = f(x, y)$ の $(a, b, f(a, b))$ における接平面を求めましょう．

$y = A(x - a) + B(y - b) + f(a, b)$

$$z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$



接平面(その2)

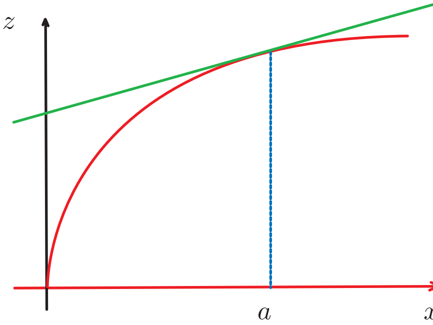
断面 $y = b$ を考えます.
接線の傾きは、偏微分の定義から

$$f_x(a, b)$$

他方、接平面を断面 $y = b$ に制限すると

$$y = A(x - a) + f(a, b)$$

だから $A = f_x(a, b)$



接平面(その3)

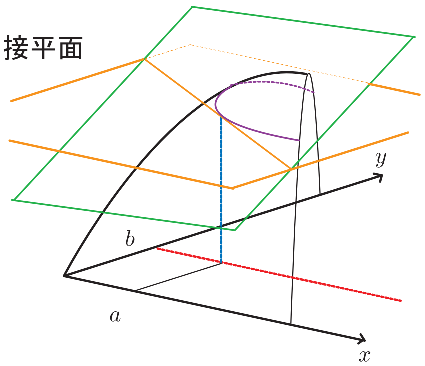
- $y = f(x, y)$ の $(a, b, f(a, b))$ における接平面は

$$y = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

等量曲線の接線

次に断面 $y = f(a,b)$ を考えます．等量曲線 $y = f(a,b)$ の接線と接平面の断面が一致することに注意しましょう．

$$z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$



等量曲線の接線、RTS と限界生産物 (MP)

接平面を $y = f(a, b)$ に制限すると

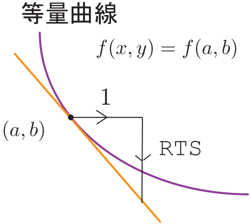
$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0$$

になります．傾きは

$$-\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$$

となり

$$RTS = \frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)} = \frac{MP_1}{MP_2}$$



等量曲線の接線（陰関数の定理を用いる）

- （陰関数の定理）曲線 $g(x,y)=0$ があるとき

$$g_y(a,b)\neq 0,\quad g(a,b)=0$$

ならば、a,b の近くで $y=\varphi(x)$ と解けます．

- これを $f(x,y)-f(a,b)=0$ に適用します．すると

$$f(x,\varphi(x))-f(a,b)=0$$

が $x=a$ の近くで常に成立します．この両辺を微分すると

$$f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=0$$

$$\longrightarrow\quad \varphi'(a)=-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$$

長期利潤の最大化

- ここで「長期」というのはすべての生産要素を変えるという意味である（短期的には、原子力発電所を建設できない）
- 簡単のために

$$f_{xx}(\mathbf{x}) < 0, \quad \det(H(f)(\mathbf{x})) > 0 \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2_{++})$$

を仮定する．これは、任意の $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ に対して

$$F(t) = f(a + \alpha_1 t, b + \alpha_2 t)$$

が

$$F''(t) < 0$$

を満たすことである．

長期利潤の最大化（その２）

- 生産物価格を $r > 0$、生産要素の価格を $p,\ q > 0$ とする．利潤

$$\pi(\mathbf{x}) = r \cdot f(x, y) - px - qy$$

を最大化する．$a, b \in \mathbf{R}^2_{++}$ において

$$\pi_x(a, b) = r \cdot f_x(a, b) - p = 0, \quad \pi_y(a, b) = r \cdot f_y(a, b) - q = 0$$

とすると利潤が最大となる．

長期利潤の最大化（その３）

- このとき（利潤が最大化されるとき）

$$MP_1 = \frac{p}{r}, \quad MP_2 = \frac{q}{r}$$

となる．

- これを変形して

$$r \cdot MP_1 = p, \quad r \cdot MP_2 = q$$

となるが、これを限界生産物価値 (Value of Marginal Product) あるいは限界価値生産物 (Marginal Value Product) という．

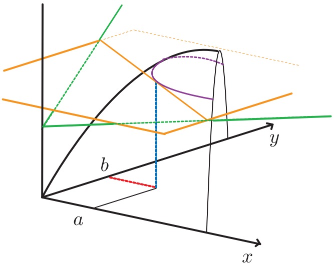
技術的限界代替率と要素価格比（その１）

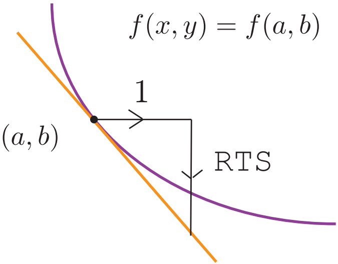
- このとき（利潤が最大化されるとき）

$$RTS = \frac{MP_1}{MP_2} = \frac{p/r}{q/r} = \frac{p}{q}$$

  となる.
- この $RTS = \frac{p}{q}$ の意味を、西村和雄先生の「ミクロ経済学入門」（岩波書店、第 2 版）123 ページに従って理解しよう.

等量曲線





- 等利潤平面 $rz - px - qy = \pi(a, b)$ と生産関数のグラフ $z = f(x, y)$ が $(a, b, f(a, b))$ で接しています.
- 等利潤平面と平面 $z = f(a, b)$ との交わり

$$px + qy = pf(a, b) - \pi(a, b)(= pa + qb)$$

が等量曲線の接線の方程式になります.