不等式制約に関する注意

定理 $U\ (\subset \mathbb{R}^2)$ は開集合とする. $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級とする.

仮定 $\nabla(f)(P) \neq \vec{0}\quad (P \in U)$, $\nabla(g)(P) \neq \vec{0}\quad (P \in U)$

問題 $g(P) \leq I$ の下で $z = f(P)$ を極大(極小)化する

$P_0 \in U$ において極大(小)値をとるとする. i.e.

① $\exists \delta > 0$

$$P \in B_\delta(P_0) \cap \{P \in U \,;\, g(P) \leq I\} \Rightarrow f(P) \leq f(P_0)$$
$$(\qquad \geq \qquad)$$

② $g(P_0) < I$.

$\Rightarrow \quad g(P_0) = I$.

(証明) $g(P_0) < I$ とすると $\exists \delta' > 0$

$$B_{\delta'}(P_0) \subset \{ P \in U ; g(P) < I \}$$

これは g が連続であることから従う．このとき

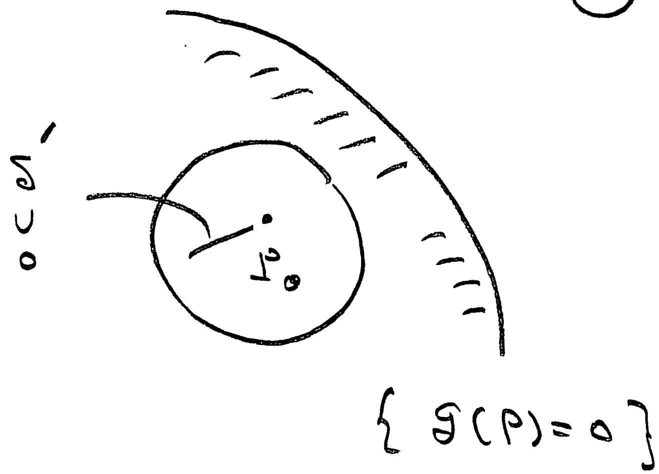
$\delta' > 0$ を $0 < \delta' < \delta$ となるようにとると

$$P \in B_{\delta'}(P_0) \Rightarrow f(P) \leq f(P_0)$$

も成立する．これから

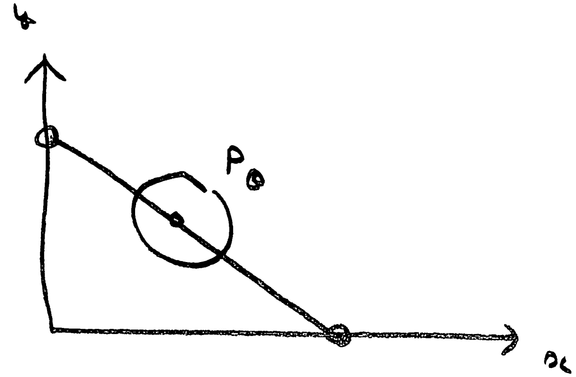
$$\nabla(f)(P_0) = \vec{0}$$

となるが仮定に反する



不等式制約の予算制約下の効用最大化

$$u(x, y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}, \quad c(x, y) = px + qy$$



を不等式制約

$$g(x, y) := I - px - qy \geqq 0$$

で考える. $P_* \in \mathbb{R}^2_{++}$ で最大とする. このとき P_0 で極大である.

$$\nabla(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}} \\ \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{3}{4}} \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \quad \nabla(g) = -\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

から $g(P_*) = 0$ が従う. このとき

制約条件 $g(P) = 0$ の下でも $z = u(P)$ は P_* で極大である.

よって $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$(\#) \begin{cases} \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}} - \lambda p = 0 \\ \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{3}{4}} - \lambda q = 0 \\ I - px - qy = 0 \end{cases}$$

が成立する. これを解くと $x = \frac{I}{2p}$, $y = \frac{I}{2q}$, $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}\, I^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}}}$

以下 $P_*\left(\frac{I}{2p}, \frac{I}{2q}\right)$ とする. $g(P) \geq 0$ である

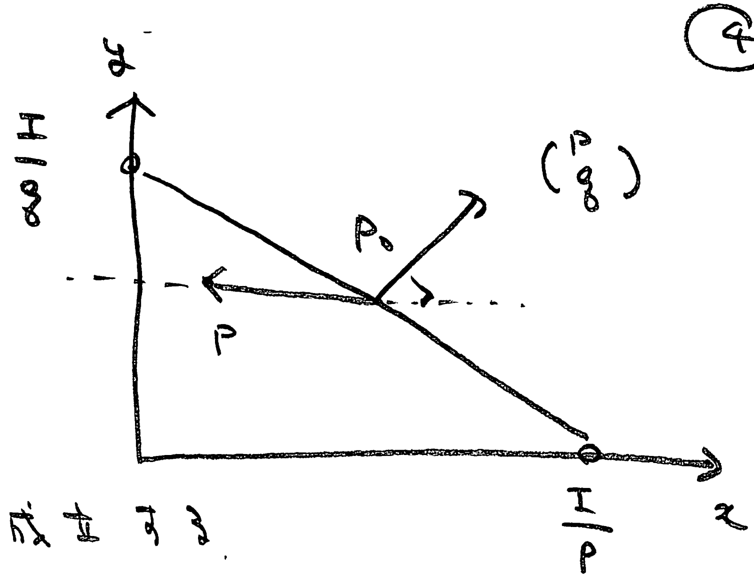
$P \in \mathbb{R}^2_{++}$ を任意にとる.

$$\vec{\alpha} := \overrightarrow{P_0 P} \quad (\neq \vec{0})$$

とって

$$P_t = P_* + t\vec{\alpha}$$

と定める. このとき $g(t) \geq 0$ が $0 \leq t \leq 1$ で成立する.



$$U(t) = u(P_t)$$

とすると.

$$U'(t) = (\nabla(u)(P_t), \vec{\alpha}) \quad 特に \quad U'(0) = (\nabla(u)(P_*), \vec{\alpha}) = \left(\lambda \binom{p}{q}, \vec{\alpha}\right) \leq 0$$

前ページの

となる. (#)から $\lambda > 0$ にも注意しよう. Taylorの定理を用いると

$$U(1) = U(0) + U'(0)\cdot 1 + \frac{1}{2}U''(c) < U(0)$$

から

$$u(P) < u(P_0)$$

であることがわかる. $U''(c) = (H(u)(P_c)\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) < 0$ に注意.

双対定理

$u:\mathbb{R}^2_{++}\longrightarrow\mathbb{R}$, $c:\mathbb{R}^2_{++}\longrightarrow\mathbb{R}$

前提 $\nabla(u)(P)\neq\vec{0}$, $\nabla(c)(P)\neq\vec{0}$ $\left(P\in\mathbb{R}^2_{++}\right)$

問題 I $c(x,y)\leq I$ の下で $u(x,y)$ を最大化

問題 II $u(x,y)\geq\overline{u}$ の下で $c(x,y)$ を最小化

定理 (1) $P_0\in\mathbb{R}^2_{++}$ が問題 I の解とする i.e.

- $c(P_0)\leq I$
- $c(P)\leq I\Rightarrow u(P)\leq u(P_0)$

このとき $\overline{u}=u(P_0)$ として P_0 は問題 II の解となる.

(2) $P_0\in\mathbb{R}^2_{++}$ が問題 II の解とする.

- $u(P)\geq\overline{u}$
- $u(P)\geq\overline{u}\Rightarrow c(P_0)\leq c(P)$

このとき $I=c(P_0)$ として P_0 は問題 I の解となる.

(証明) (1)を証明する.

$c(P) < I$ のとき $u(P) < u(P_0)$ となる. $u(P) = u(P_0)$ とすると P で極大となり $\nabla(u)(P) \neq \vec{0}$ となるからです.

$$c(P) < I \Rightarrow u(P) < u(P_0)$$

となります. この対偶は

$$u(P) \geq u(P_0) = \overline{u} \Rightarrow c(P) \geq I$$

となります. $c(P_0) = I$ であることが前定理から分かりますから

$$u(P) \geq u(P_0) = \overline{u} \Rightarrow c(P) \geq c(P_0) = I.$$

となります. 従って P_0 が問題II の解であることが示されました.

応用　$u(x,y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}$ とします.

$u(x,y) \geqq \bar{u}$ の下で $c(x,y) = px + qy$ を最小化します.

双対問題は

「$c(x,y) \leqq I$ の下で $u(x,y)$ を最大化する」

ことで

$$(x,y) = \left(\frac{I}{2p}, \frac{I}{2q}\right) \text{ で最大値 } \frac{I^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\, p^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}}}$$

であった.

$$\bar{u} = \frac{I^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\, p^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}}} \text{ のとき すなわち } I = 2\bar{u}^2 p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \text{ のとき.}$$

$$(x,y) = \left(\bar{u}^2 \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}, \bar{u}^2 \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \text{ において}$$

最小値 $I = 2\bar{u}^2 p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}$ をとります. (双対定理の(1))