方向微分

Nobuyuki TOSE

October 11, 2017
V02 October 19, 2020

問題

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

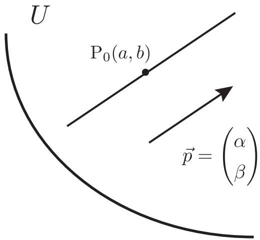
が与えられているとします．$\mathrm{P}_0(a,b) \in U$ と $\vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して

$$\mathrm{P}_t(a+t\alpha, b+t\beta)$$

$$F(t) = f(\mathrm{P}_t) = f(a+t\alpha, b+t\beta)$$

と定めるとき

$$F'(0) = ?$$



曲線の接線方向 (1)

3 次元空間中の曲線

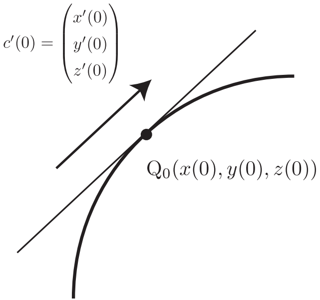
$$c: \ (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

が与えられているとき c 上の点

$$\mathrm{Q}_0(x(0), y(0), z(0))$$

における接ベクトルは

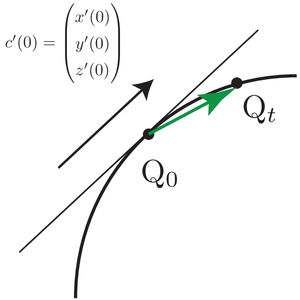
$$c'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix}$$



曲線の接線方向 (2)

$\mathrm{Q}_t(x(t), y(t), z(t))$, $\mathrm{Q}_0(x(0), y(0), z(0))$ に対して

$$\frac{1}{t-0}\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_t} = \begin{pmatrix} \frac{x(t)-x(0)}{t-0} \\ \frac{y(t)-y(0)}{t-0} \\ \frac{z(t)-z(0)}{t-0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} \quad (t \to 0)$$



点列・ベクトル列の収束

$\mathrm{Q}_\ell(x_\ell, y_\ell, z_\ell)$ $(\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, $\mathrm{Q}(a, b, c)$ に対して

$$\mathrm{Q}_\ell \to \mathrm{Q}\ (\ell \to \infty) \Leftrightarrow \sqrt{(x_\ell - a)^2 + (y_\ell - b)^2 + (z_\ell - c)^2} \to 0\ (\ell \to \infty)$$

と定義される．この条件は

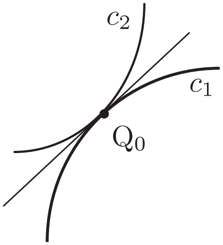
$$x_\ell \to a,\ y_\ell \to b,\ z_\ell \to c\ (\ell \to +\infty)$$

と同値である．

$$0 \leq |x_\ell - a| \leq \sqrt{(x_\ell - a)^2 + (y_\ell - b)^2 + (z_\ell - c)^2}$$

に注意．

2 曲線が接するとは



3 次元空間中の 2 曲線

$$c_1 : (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$$
$$c_2 : (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$

が与えられていて点 $Q_0(a, b, c)$ が共有されているとします．すなわち

$$(a, b, c) = (x_1(t_1), y_1(t_1), z_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2), z_2(t_2))$$

がある $t_1, t_2 \in (A, B)$ に対して成立しているとします．このとき

$$c_1 \text{ と } c_2 \text{ が } Q_0 \text{ で接する} \Leftrightarrow C_1'(t_1) \parallel C_2'(t_2)$$

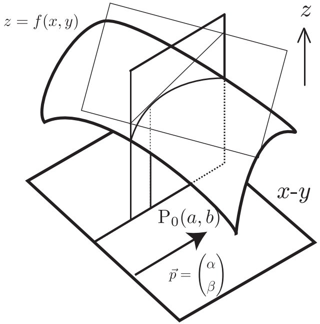
関数 $z = f(x, y)$ のグラフ (1)

関数 $z = f(x, y)$ のグラフとその上の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面を考える．点 $\mathrm{Q}_0(a, b, f(a, b))$ で 2 曲線

$$c_1(t) = (a + t\alpha, b + t\beta, F(t))$$

$$c_2(t) = (a+t\alpha, b+t\beta, f(a, b)+(\alpha f_x(a, b)+\beta f_y(a, b))t)$$

は接します.



関数 $z = f(x, y)$ のグラフ (2)

従って $c_1'(0) \parallel c_2'(0)$ すなわち

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ F'(0) \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha f_x(a, b) + \beta f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

関数 $z = f(x, y)$ のグラフ (3)

2 個の 3 次元ベクトルが平行であることから

$$F'(0) = \alpha f_x(a, b) + \beta f_y(a, b)$$

が従う．この右辺を $f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ における

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

方向の**方向微分**と呼びます.

まとめ

$$F(t) := f(a + t\alpha, b + t\beta)$$

に対して $\mathrm{P}_t(a + t\alpha, b + t\beta)$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ と定めると

$$F'(t) = \alpha f_x(\mathrm{P}_t) + \beta f_y(\mathrm{P}_t) = \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_x(\mathrm{P}_t) \\ f_y(\mathrm{P}_t) \end{pmatrix} \right) = (\vec{p}, \nabla(f)(\mathrm{P}_t))$$

発展（重要な応用）(1)

$$F'(t) = \alpha f_x(a+t\alpha, b+t\beta) + \beta f_x(a+t\alpha, b+t\beta)$$

の両辺を t で微分する．ここで 2 階の偏微分

$$f_{xx} = (f_x)_x\,,\ f_{xy} = (f_x)_y\,,\ f_{yx} = (f_y)_x\,,\ f_{yy} = (f_y)_y$$

を定義する．実は **Young の定理**によって f が C^2 級のとき

$$f_{xy} = f_{yx}$$

が成立することに注意しよう．これを用いると

$$\begin{aligned} F''(t) &= \alpha^2 f_{xx}(P_t) + 2\alpha\beta f_{xy}(P_t) + \beta^2 f_{yy}(P_t) \\ &= \left(\begin{pmatrix} f_{xx}(P_t) & f_{xy}(P_t) \\ f_{yx}(P_t) & f_{yy}(P_t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

発展（重要な応用）(2)

$$F'(t) = \alpha f_x(a + t\alpha, b + t\beta) + \beta f_x(a + t\alpha, b + t\beta)$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= \alpha\left(f_{xx}(\mathrm{P}_t)\cdot\alpha + f_{xy}(\mathrm{P}_t)\cdot\beta\right) + \beta\left(f_{yx}(\mathrm{P}_t)\cdot\alpha + f_{yy}(\mathrm{P}_t)\cdot\beta\right) \\ &= \alpha^2 f_{xx}(P_t) + 2\alpha\beta f_{xy}(P_t) + \beta^2 f_{yy}(P_t) \end{aligned}$$