消費者理論（２財の場合）–その２

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2008 年 6 月
V002 2020 年 6 月

はじめに

- 2 財の消費者理論を数学的に解説します。
- x_1 と x_2：第 1 財と第 2 財の購入量
- $p_1 > 0$ と $p_2 > 0$：第 1 財と第 2 財の価格、
  $I > 0$：所得
- （予算制約）$p_1x_1 + p_2x_2 = I$ の下で効用関数

$$u(x_1, x_2)$$

  を最大化（極大化）します。
- （前提）u: $\{(x_1, x_2);\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ で C^2 級

Lagrangeの未定乗数法

- 制約条件 $g(x_1, x_2) = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$ の下で
- $y = u(x_1, x_2)$ を極大化する。
- (a_1, a_2) で極大値をとるとする。
- ある λ が存在して

$$\begin{cases} u_{x_1} - \lambda \cdot p_1 & = & 0 \\ u_{x_2} - \lambda \cdot p_2 & = & 0 \\ I - p_1 x_1 - p_2 x_2 & = & 0 \end{cases}$$

  が $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$ において成立する。
- これを陰関数定理を用いて解いて

$$x_1 = x_1(p, I),\ x_2 = x_2(p, I),\ \lambda = \lambda(p, I)$$

  を得ます。x_i：第 i 財の需要関数

間接効用関数

- 間接効用関数：$v(p, I) := u(x_1(p, I), x_2(p, I))$
- 予算制約から

$$I - p_1 x_1(p, I) - p_2 x_2(p, I) = 0$$

- I について偏微分：$1 - \frac{\partial x_1}{\partial I} \cdot p_1 - \frac{\partial x_2}{\partial I} \cdot p_2 = 0$
- p_1 について偏微分：$x_1(p, I) + \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \cdot p_1 + \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \cdot p_2 = 0$
- p_2 について偏微分：$x_2(p, I) + \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \cdot p_1 + \frac{\partial x_2}{\partial p_2} \cdot p_2 = 0$

所得の限界効用

- $\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p, I)$
- （証明）

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial I} &= u_{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial I} + u_{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial I} \\
&= \lambda p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial I} + \lambda p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial I} \\
&= \lambda \left(p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial I} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial I} \right) = \lambda \cdot 1
\end{aligned}
$$

Roy の恒等式

- $\frac{\partial v}{\partial p_1} + \frac{\partial v}{\partial I} \cdot x_1(p, I) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial p_2} + \frac{\partial v}{\partial I} \cdot x_2(p, I) = 0$
- （証明）

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial p_1} &= u_{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + u_{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \\
&= \lambda p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \lambda p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \\
&= \lambda \left(p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \right) \\
&= -\lambda \cdot x_1(p, I) = -\frac{\partial v}{\partial I} \cdot x_1(p, I)
\end{aligned}$$

斉次関数

- $U \subset \mathbf{R}^2$ が錘とは

$$(x, y) \in U,\ \ t > 0 \Rightarrow (tx, ty) \in U$$

- 開錘 U 上の関数 $f:\ U \to \mathbf{R}$ が k 次斉次とは

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \quad (t > 0,\ (x, y) \in U)$$

- 定義の式を t について微分：

$$xf_x(tx, ty) + yf_x(tx, ty) = kt^{k-1} f(tx, ty)$$

- $t = 1$ を代入すると Euler の等式

$$xf_x(x, y) + yf_x(x, y) = kf(x, y)$$

Euler の等式

- 開錘 U 上の関数 $f: \ U \to \mathbf{R}$ が Euler の等式

$$xf_x(x,y) + yf_x(x,y) = kf(tx,ty)$$

　を満たすとする。
- $F(t) := t^{-k} f(tx,ty)$ は $F'(t) \equiv 0$ を満たす（各自示す）
- $F(1) = F(t)$ から $f(x,y) = t^{-k} f(tx,ty)$ となり、

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y)$$

Euler の等式

- 開錘 U 上の関数 $f: U \to \mathbf{R}$ が Euler の等式

$$xf_x(x,y)+yf_x(x,y)=kf(tx,ty)$$

を満たすとする。

- $F(t) := t^{-k}f(tx,ty)$ は $F'(t)\equiv 0$ を満たす（各自示す）
- $F(1)=F(t)$ から $f(x,y)=t^{-k}f(tx,ty)$ となり、

$$f(tx,ty)=t^kf(x,y)$$

Euler の等式

- 開錘 U 上の関数 $f: \ U \to \mathbf{R}$ が Euler の等式

$$xf_x(x, y) + yf_x(x, y) = kf(tx, ty)$$

を満たすとする。

- $F(t) := t^{-k}f(tx, ty)$ は $F'(t) \equiv 0$ を満たす（各自示す）
- $F(1) = F(t)$ から $f(x, y) = t^{-k}f(tx, ty)$ となり、

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

Euler の等式

- 開錘 U 上の関数 $f: U \to \mathbf{R}$ が Euler の等式

$$xf_x(x,y) + yf_x(x,y) = kf(tx,ty)$$

  を満たすとする。
- $F(t) := t^{-k}f(tx,ty)$ は $F'(t) \equiv 0$ を満たす（各自示す）
- $F(1) = F(t)$ から $f(x,y) = t^{-k}f(tx,ty)$ となり、

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y)$$

- $f(x,y)$ が k 次斉次 $\Leftrightarrow$ Euler の等式

間接効用関数の 0 次斉次性

- 間接効用関数 $v(p, I)$ は (p, I) について 0 次斉次
-

$$
\begin{aligned}
& p_1 \frac{\partial v}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial v}{\partial p_2} + I \frac{\partial v}{\partial I} \\
= \; & p_1(-\lambda x_1) + p_2(-\lambda x_2) + I \cdot \lambda \\
= \; & \lambda \left(I - p_1 x_1 - p_2 x_2 \right) = 0
\end{aligned}
$$

支出最小化問題

- $g(x) = \bar{u} - u(x)$ の下で $f(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2$ を最小化
- （1階の必要条件）ある μ が存在して

$$\begin{cases} p_1 - \mu u_{x_1} &= 0 \\ p_2 - \mu u_{x_2} &= 0 \\ \bar{u} - u(x) &= 0 \end{cases}$$

支出最小化問題–極小の十分条件

- 停留点において極小値をとる十分条件は

$$\begin{vmatrix} 0 & -u_{x_1} & -u_{x_2} \\ -u_{x_1} & -\mu u_{x_1x_1} & -\mu u_{x_1x_2} \\ -u_{x_2} & -\mu u_{x_2x_1} & -\mu u_{x_2x_2} \end{vmatrix} = -\mu \begin{vmatrix} 0 & u_{x_1} & u_{x_2} \\ u_{x_1} & u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ u_{x_2} & u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} \end{vmatrix} < 0$$

- $p_1, p_2 > 0$ のとき、$u_{x_1}, u_{x_2} > 0$ とすると $\mu > 0$
- このとき、停留点で極小値をとる十分条件は

$$\begin{vmatrix} 0 & u_{x_1} & u_{x_2} \\ u_{x_1} & u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ u_{x_2} & u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} \end{vmatrix} > 0$$

が停留点で成立すること

狭義の準凹関数

- $\mathbf{R}^2$ の開凸集合 U 上の関数 $f: U \to \mathbf{R}$ が**狭義の準凸関数**とは

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{b},\ f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{b}) \Rightarrow f(\mathbf{a}) \leq f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b})$$

- f が C^2 級のときは、そのための十分条件：

$$\begin{vmatrix} 0 & u_{x_1} \\ u_{x_1} & u_{x_1 x_1} \end{vmatrix} = -u_{x_1}^2 < 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & u_{x_1} & u_{x_2} \\ u_{x_1} & u_{x_1 x_1} & u_{x_1 x_2} \\ u_{x_2} & u_{x_2 x_1} & u_{x_2 x_2} \end{vmatrix} > 0$$

が U の各点で成立することである。

補償需要関数、最小支出関数

- 最小支出問題のための 1 階の必要条件

$$\begin{cases} g_1(x,\mu,p,\bar{u}) := p_1 - \mu u_{x_1} & = & 0 \\ g_2(x,\mu,p,\bar{u}) := p_2 - \mu u_{x_2} & = & 0 \\ g_3(x,\mu,p,\bar{u}) := \bar{u} - u(x) & = & 0 \end{cases}$$

- 停留点で条件

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(x_1,x_2,\mu)}\right| &= \begin{vmatrix} -\mu u_{x_1x_1} & -\mu u_{x_1x_2} & -u_{x_1} \\ -\mu u_{x_2x_1} & -\mu u_{x_2x_2} & -u_{x_2} \\ -u_{x_1} & -u_{x_2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\mu \begin{vmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} & u_{x_1} \\ u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} & u_{x_2} \\ u_{x_1} & u_{x_2} & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

の下で陰関数定理が使える。

補償需要関数、最小支出関数（その２）

- 陰関数定理を使うと、C^1 級関数として

$$x_1 = x_1^*(p, \bar{u}),\ \ x_2 = x_2^*(p, \bar{u}),\ \ \mu = \mu(p, \bar{u})$$

  と解ける。
- x_i^* ：補償需要関数
- 最小支出関数

$$E(p, \bar{u}) = p_1 \cdot x_1^*(p, \bar{u}) + p_2 \cdot x_2^*(p, \bar{u})$$

Mackenzie の補題

- Mackenzie の補題 $\frac{\partial E}{\partial p_1} = x_1^*, \quad \frac{\partial E}{\partial p_2} = x_2^*$
- （証明）$\bar{u} - u(x_1^*(p,\bar{u}), x_2^*(p,\bar{u})) = 0$ を p_1 で偏微分

$$u_{x_1} \cdot \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} + u_{x_2} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} \equiv 0$$

-

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial p_1} &= x_1^* + p_1 \cdot \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} \\ &= x_1^* + \mu \left(u_{x_1} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} + u_{x_2} \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} \right) = x_1^* \end{aligned}$$

最小支出関数の斉次性

- $x_i^*(p, I)$ は p について 0 次同次
- $$p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = \mu \left(u_{x_1} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} + u_{x_2} \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} \right) = 0$$
- $E(p, I)$ は p について 1 次同次