消費者理論（2財の場合）

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2008年6月
V002 2020年6月 (emath, intro)

はじめに

- 2財の消費者理論を数学的に解説します。
- x_1 と x_2：第1財と第2財の購入量
- $p_1 > 0$ と $p_2 > 0$：第1財と第2財の価格，$I > 0$：所得
- （予算制約）$p_1x_1 + p_2x_2 = I$ の下で効用関数

$$u(x_1, x_2)$$

  を最大化（極大化）します。
- （前提）u: $\{(x_1, x_2);\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ で C^2 級

Lagrangeの未定乗数法

- 制約条件 $g(x_1, x_2) = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$ の下で
- $y = u(x_1, x_2)$ を極大化する。
- (a_1, a_2) で極大値をとるとする。
- ある λ が存在して

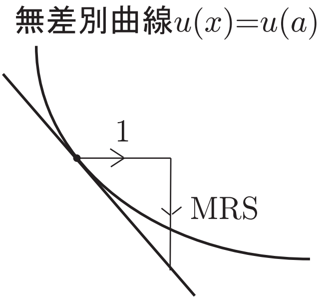
$$\begin{cases} u_{x_1} - \lambda \cdot p_1 & = & 0 \\ u_{x_2} - \lambda \cdot p_2 & = & 0 \\ I - p_1 x_1 - p_2 x_2 & = & 0 \end{cases}$$

  が $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$ において成立する。
- 貨幣 1 単位あたりの限界効用の均等

$$\frac{u_{x_1}(a)}{p_1} = \frac{u_{x_2}(a)}{p_2} = \lambda$$

限界代替率

- 無差別曲線 $u(x) = u(a)$ の接線の傾き $-\frac{u_{x_1}(a)}{u_{x_2}(a)}$
- 第 1 財を 1 単位追加的に消費するとき、効用を一定に保つためには、近似的に第 2 財を MRS 減少させる必要がある。



- 「限界代替率は限界効用の比に等しい」

$$MRS = \frac{u_{x_1}(a)}{u_{x_2}(a)}$$

限界代替率（合理的な消費者の場合）

- 「限界代替率は限界効用の比に等しい」

$$MRS = \frac{u_{x_1}(a)}{u_{x_2}(a)}$$

- 効用が最大化されている場合は、ある λ に対して

$$\begin{cases} u_{x_1} - \lambda \cdot p_1 & = & 0 \\ u_{x_2} - \lambda \cdot p_2 & = & 0 \\ I - p_1 x_1 - p_2 x_2 & = & 0 \end{cases}$$

- この場合、限界代替率と価格比が等しくなる。

$$MRS = \frac{u_{x_1}(a)}{u_{x_2}(a)} = \frac{p_1}{p_2}$$

Lagrangeの未定乗数法（十分条件）

- 制約条件 $g(x) = I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$ の下で $y = u(x)$ を極大化する。そのための十分条件：
- ある λ に対して

$$\begin{cases} u_{x_1} - \lambda \cdot p_1 & = & 0 \\ u_{x_2} - \lambda \cdot p_2 & = & 0 \\ I - p_1x_1 - p_2x_2 & = & 0 \end{cases}$$

- さらに行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ -p_2 & u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} \end{vmatrix} > 0$$

- 以下では $x = (a_1, a_2)$ においてこの条件を仮定する。

陰関数の定理

- $\mathbf{R}^6$ の開集合 U 上の C^1 級関数 $g_i(x, y)$
- $x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3)$
- $(x, y) = (a, b)$ において

$$g_i(a, b) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)(a, b) \neq 0$$

- このとき

$$g_1(x, y) = g_2(x, y) = g_3(x, y) = 0$$

は

$$x_1 = \varphi_1(y), \quad x_2 = \varphi_2(y), \quad x_3 = \varphi_3(y)$$

と (a, b) の近くで C^1 級関数 φ_i で解ける。

陰関数の定理を適用

- $x \leftrightarrow (x_1, x_2, \lambda), \quad y \leftrightarrow (p_1, p_2, I)$
- $g_1 = u_{x_1} - \lambda p_1, \quad g_2 = u_{x_2} - \lambda p_2, \quad g_3 = I - p_1 x_1 - p_2 x_2$
- $\det\left(\frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(x_1, x_2, \lambda)}\right) = \begin{vmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} & -p_1 \\ u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$
- このとき

$$u_{x_1} - \lambda p_1 = u_{x_2} - \lambda p_2 = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

は

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, I),\ x_2 = x_2(p_1, p_2, I),\ \lambda = \lambda(p_1, p_2, I)$$

と局所的に C^1 級関数 x_1, x_2, λ で解ける。

需要関数・間接効用関数・所得の限界効用

- $x_i = x_i(p_1, p_2, I)$：第 i 財の需要関数
- 間接効用関数 $v(p_1, p_2, I) = u(x_1(p, I), x_2(p, I))$
- **定理：** $\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p, I)$
- （証明）

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial I} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial I} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial I} \\
&= \lambda p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial I} + \lambda p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial I} = \lambda \left(p_1 \frac{\partial x_1}{\partial I} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial I} \right)
\end{aligned}
$$

- $I = p_1 x_1(p, I) + p_2 x_2(p, I)$ が常に成立するので

$$
1 = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial I} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial I}
$$