効用関数のスケール変換

例1　$u(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$，$I - px - qy = 0$ の下で最大化

(x, y) で極値をとるとき ある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{cases} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} + \lambda(-p) = 0 \\ \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} + \lambda(-q) = 0 \\ I - px - qy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 3\lambda p & (1) \\ x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} = \frac{3\lambda q}{2} & (2) \\ I - px - qy = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) × x，(2) × y から　$3\lambda p x = \frac{3\lambda}{2} q y = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$

(1) から $\lambda \neq 0$ が分かるので

$$px = \frac{1}{2} q y$$

となる (3) から　$px = \frac{I}{3}$，$qy = \frac{2}{3} I$　従って $\begin{cases} x = \frac{I}{3p} \\ y = \frac{2I}{3q} \end{cases}$ と需要関数が

求まる。このとき

$$\lambda = \frac{1}{3p} \left(\frac{I}{3p}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2I}{3q}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} 3^{-\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{3}} q^{-\frac{2}{3}}$$

例2　$U(x,y) = \log u(x,y) = \frac{1}{3}\log x + \frac{2}{3}\log y$ を $I - px - qy = 0$ の下で最大化

(x, y) で極値をとるとき ある $\Lambda \in \mathbb{R}$ に対して　　　Λ (λ の大文字)

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \Lambda(-p) = 0 & (1) \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y} + \Lambda(-q) = 0 & (2) \\ I - px - qy = 0 & (3) \end{cases}$$

(1)から $\Lambda \neq 0$ が分かるので (1), (2) から

$$x = \frac{1}{3p\Lambda}, \quad y = \frac{2}{3q\Lambda}$$

これを (3) に代入すると

$$I - \frac{1}{3\Lambda} - \frac{2}{3\Lambda} = I - \frac{1}{\Lambda} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \Lambda = \frac{1}{I}.$$

さらに

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3q}$$

と需要関数が求まる.

一般論　$F'(u) > 0$, $U = F(u(x,y))$ とする.

$$\begin{cases} u_x(a,b) + \lambda(-p) = 0 & (1) \\ u_y(a,b) + \lambda(-q) = 0 & (2) \\ I - pa - qb = 0 & (3) \end{cases}$$

をみたす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在するとする. chain Rule を用いると

$$U_x(a,b) = F'(u(a,b))\, u_x(a,b)$$

$$U_y(a,b) = F'(u(a,b))\, u_y(a,b)$$

なので (1), (2) に $F'(u(a,b))$ をかけると

$$\begin{cases} U_x(a,b) + F'(u(a,b)) \cdot \lambda(-p) = 0 & (1)' \\ U_y(a,b) + F'(u(a,b)) \cdot \lambda(-q) = 0 & (2)' \\ I - pa - qb = 0 & (3) \end{cases}$$

ここで $\Lambda = F'(u(a,b))\lambda$ とおくとよい. これから u と U の定める需要関数が一致することが分かる.

例1と例2において　$\Lambda = F'(u(a,b)) \cdot \lambda$ であるか確かめよう.

$$u(a,b) = v(p,q,I) = \left(\frac{I}{3p}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2I}{3q}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$F'(u(a,b)) = \frac{1}{u(a,b)} = \left(\frac{I}{3p}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2I}{3q}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$F'(u(a,b)) \cdot \lambda = \left(\frac{I}{3p}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2I}{3q}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3p} \left(\frac{I}{3p}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2I}{3q}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3p} \cdot \left(\frac{I}{3p}\right)^{-1} = \frac{1}{I}$$

となるので例2の　$\lambda = \frac{1}{I}$ と整合的となる.