

# Lagrange の未定乗数法（その2）

戸瀬信之

Dec 19, 2018

V04 Nov. 25, 2020 for CalcNT

# 制約条件付き極値問題

$U$  を  $\mathbf{R}^2$  の開集合とする. 2 関数

$$f, g: U \rightarrow \mathbf{R}$$

が与えられているとき

問題

$g(x, y) = 0$  の下で  $z = f(x, y)$  を極大化 (極小化) する

## 定理

$g(a, b) = 0$ ,  $g_y(a, b) \neq 0$  を満たす  $(a, b) \in U$  において制約条件付き極値問題が極大値（極小値）をとるとします. このとき次の (L) を満たす  $\lambda \in \mathbf{R}$  が存在します.

$$\begin{cases} f_x(a, b) + \lambda g_x(a, b) = 0 & (1) \\ f_y(a, b) + \lambda g_y(a, b) = 0 & (2) \\ g(a, b) = 0 & (3) \end{cases} \quad (\text{L})$$

ここで (1) と (2) を接線条件と呼びます.

# 接線条件

接線条件は

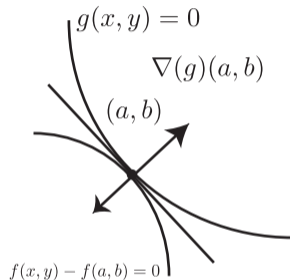
$$\nabla(f)(a, b) = -\lambda \cdot \nabla(g)(a, b)$$

と表せます.  $\nabla(f)(a, b)$  は  $f$  の等高線

$$f(x, y) - f(a, b) = 0$$

の  $(a, b)$  における法線ベクトルです.

2 曲線  $g(x, y) = 0$  と  $f(x, y) - f(a, b) = 0$  は接線を共有しますから, 接していることが分かります.



# 制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例

例  $l, p, q > 0$  とする. 予算制約

$$g(x, y) = l - px - qy = 0 \quad (x, y > 0)$$

の下で効用関数

$$u(x, y) = \sqrt{xy}$$

を最大化する. この問題は第1財, 第2財の価格が  $p, q$  のときに, 予算  $l$  をすべて支出して第1財を  $x$ , 第2財を  $y$  購入して効用を最大化するという問題である.

## 制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例 (2)

$(x, y)$  で極大・極小であるとする

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \lambda(-p) = 0 & (1) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \lambda(-q) = 0 & (2) \\ l - px - qy = 0 & (3) \end{cases}$$

を満たす  $\lambda \in \mathbf{R}$  が存在します. (1)  $\times x$ , (2)  $\times y$  を考えると

$$\sqrt{xy} = 2\lambda px = 2\lambda qy$$

であることが分かります. (1) を考えると  $\lambda \neq 0$  であることが分かりますから

$$px = qy$$

さらに (3) から

$$px = qy = \frac{l}{2} \quad \text{従って} \quad x = \frac{l}{2p}, \quad y = \frac{l}{2q}$$

## 制約条件付き極値問題—ミクロ経済学の例 (3)

$$x(p, q, I) = \frac{I}{2p}, \quad y(p, q, I) = \frac{I}{2q}$$

を**需要関数**と呼びます。さらに (1) から Lagrange の未定乗数が

$$\lambda = \frac{1}{2p} \cdot \frac{\sqrt{\frac{I}{2q}}}{\sqrt{\frac{I}{2p}}} = \frac{1}{2\sqrt{pq}}$$

と求まります。この状況で  $\lambda(p, q, I)$  を**所得の限界効用**と呼びます。

# 所得の限界効用

$$v(p, q, I) = u(x(p, q, I), y(p, q, I)) = \sqrt{\frac{I}{2p}} \cdot \sqrt{\frac{I}{2q}} = \frac{I}{2\sqrt{pq}}$$

を間接効用関数と呼びます。このとき

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \frac{1}{2\sqrt{pq}} = \lambda(p, q, I)$$

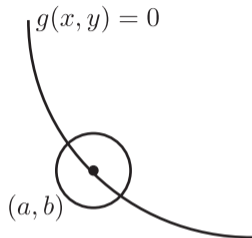
となります。これが  $\lambda(p, q, I)$  が所得の限界効用と呼ばれる理由です。この等式

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p, q, I)$$

は一般的に成立します。



# 極大・極小の十分条件



$$g(a, b) = 0, \quad g_y(a, b) \neq 0$$

を仮定して、陰関数定理を適用する.  $(a, b)$  の近くで

$$y = \varphi(x)$$

と曲線  $g(x, y) = 0$  を表す.

$(a, b)$  で極大 (極小) ならば

$$F(t) = f(t, \varphi(t))$$

とすると  $F'(a) = 0$  が従う.

$$F''(a) > 0 \quad (\text{resp.} \quad F''(a) < 0)$$

ならば  $(a, b)$  で極小 (resp. 極大) となります.

## 解法 (2)

Chain Rule を使うと

$$F'(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= f_{xx}(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_{xy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &\quad + \varphi'(t) (f_{yx}(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_{yy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) \\ &\quad + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi''(t) \\ &= f_{xx}(t, \varphi(t)) + 2f_{xy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) + f_{yy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)^2 \\ &\quad + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi''(t) \end{aligned}$$

## 解法 (3)

さらに  $g(t, \varphi(t)) \equiv 0$  の両辺を  $t$  で微分して

$$g_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \equiv 0$$

$$g_{xx}(t, \varphi(t)) + 2g_{xy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) + g_{yy}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)^2 \\ g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi''(t) \equiv 0$$

を得ます.

## 解法 (4)

$t = a$  とするとき  $P_0(a, b)$  と定めて

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}$$

$$\varphi''(a) = -\frac{1}{g_y(a, b)} (g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0) \cdot \varphi'(a) + g_{yy}(P_0) \cdot \varphi'(a)^2)$$

となります。

## 解法 (5)

さらに

$$\begin{aligned} F''(a) &= f_{xx}(P_0) + 2f_{xy}(P_0) \cdot \varphi'(a) + f_{yy}(P_0) \cdot \varphi'(a)^2 \\ &\quad + f_y(P_0) \cdot \varphi''(a) \\ &= f_{xx}(P_0) + 2f_{xy}(P_0) \cdot \varphi'(a) + f_{yy}(P_0) \cdot \varphi'(a)^2 \\ &\quad - \frac{f_y(P_0)}{g_y(P_0)} (g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0) \cdot \varphi'(a) + g_{yy}(P_0) \cdot \varphi'(a)^2) \\ &= L_{xx}(P_0, \lambda) + 2L_{xy}(P_0, \lambda) \cdot \varphi'(a) + L_{yy}(P_0, \lambda) \cdot \varphi'(a)^2 \end{aligned}$$

が成立します。ここで

$$\lambda = -\frac{f_y(P_0)}{g_y(P_0)}, \quad L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

としました。

## 解法 (6)

さらに

$$\begin{aligned} & F''(a) \\ &= L_{xx}(P_0, \lambda) + 2L_{xy}(P_0, \lambda) \cdot \left(-\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}\right) + L_{yy}(P_0, \lambda) \cdot \left(-\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}\right)^2 \\ &= \frac{1}{g_y(P_0)^2} \left( L_{xx}(P_0, \lambda) \cdot g_y(P_0)^2 - 2L_{xy}(P_0, \lambda) \cdot g_x(P_0)g_y(P_0) \right. \\ &\quad \left. + L_{yy}(P_0, \lambda) \cdot g_x(P_0)^2 \right) \\ &= -\frac{1}{g_y(P_0)^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & g_x(a, b) & g_y(a, b) \\ g_x(a, b) & L_{xx}(a, b, \lambda) & L_{xy}(a, b, \lambda) \\ g_y(a, b) & L_{yx}(a, b, \lambda) & L_{yy}(a, b, \lambda) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

# 定理

## 定理

$$\begin{cases} f_x(a, b) + \lambda g_x(a, b) = 0 & (1) \\ f_y(a, b) + \lambda g_y(a, b) = 0 & (2) \\ g(a, b) = 0 & (3) \end{cases} \quad (L)$$

を満たす  $\lambda \in \mathbf{R}$  が存在するとします。さらに

$$B(a, b, \lambda) := \begin{vmatrix} 0 & g_x(a, b) & g_y(a, b) \\ g_x(a, b) & L_{xx}(a, b, \lambda) & L_{xy}(a, b, \lambda) \\ g_y(a, b) & L_{yx}(a, b, \lambda) & L_{yy}(a, b, \lambda) \end{vmatrix}$$

に対して  $B(a, b, \lambda) < 0$  ならば  $(a, b)$  で極小となります。  $B(a, b, \lambda) > 0$  ならば  $(a, b)$  で極大となります。ここで

$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

と定めています。

$$\begin{aligned}\varphi''(a) &= -\frac{1}{g_y(a, b)} (g_{xx}(P_0) + 2g_{xy}(P_0) \cdot \varphi'(a) + g_{yy}(P_0) \cdot \varphi'(a)^2) \\ &= -\frac{1}{g_y(a, b)^3} (g_{xx}(P_0) \cdot g_y(P_0)^2 - 2g_{xy}(P_0) \cdot g_x(P_0)g_y(P_0) \\ &\quad + g_{yy}(P_0) \cdot g_x(P_0)^2) \\ &= \frac{1}{g_y(a, b)^3} \begin{vmatrix} 0 & g_x(a, b) & g_y(a, b) \\ g_x(a, b) & g_{xx}(a, b) & g_{xy}(a, b) \\ g_y(a, b) & g_{yx}(a, b) & g_{yy}(a, b) \end{vmatrix}\end{aligned}$$