Lagrange の未定乗数法— 3 変数 2 制約条件

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2008 年 7 月
2020 年 10 月,11 月　経済数学・経済数学入門 V002b

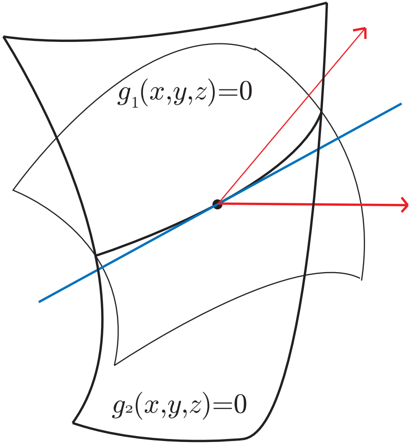
はじめに

- U : $\mathbf{R}^3$ の開集合
- g_1, g_2, f : $U \longrightarrow \mathbf{R}$ C^1 級の関数
- 制約条件 C : $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$ の下で

$$w = f(x, y, z)$$

を最適化する.

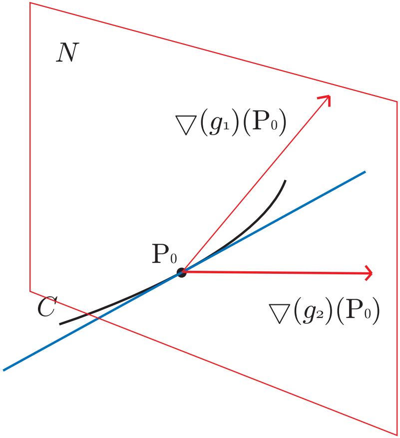
図 1



陰関数定理のための条件

- C 上の点 $\mathrm{P}_0(a,b,c)$ において $\begin{vmatrix} g_{1y}(\mathrm{P}_0) & g_{1z}(\mathrm{P}_0) \\ g_{2y}(\mathrm{P}_0) & g_{2z}(\mathrm{P}_0) \end{vmatrix} \neq 0$ を仮定する.
- このとき P_0 の近くで C は
$$(x, \varphi(x), \psi(x))$$
とパラメータ表示される.
- $\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) \not\parallel \nabla(g_2)(\mathrm{P}_0)$ であるので
$$\dim\left(\mathbf{R}\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) + \mathbf{R}\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0)\right) = 2$$
- $N = \mathbf{R}\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) + \mathbf{R}\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0)$: C の法面

図 2



N
$\bigtriangledown(g_1)(\mathrm{P}_0)$
P_0
C
$\bigtriangledown(g_2)(\mathrm{P}_0)$

直交補空間

- $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間 V に対して
$$V^{\perp} := \{\vec{w} \in \mathbf{R}^n;\ (\vec{v}, \vec{w}) = 0 \quad (\vec{v} \in V)\}$$
を**直交補空間**とよびます.
- $$\left(V^{\perp}\right)^{\perp} = V, \quad V^{\perp} \oplus V = \mathbf{R}^n$$
- V と W が $\mathbf{R}^n$ の部分空間で $V \subset W$ ならば
$$W^{\perp} \subset V^{\perp}$$

Chaine Rule

$$F(t) := f(t, \varphi(t), \psi(t))$$

とくと P_0 で極大（また極小）ならば

$$F'(a) = f_x(\mathrm{P}_0) + f_y(\mathrm{P}_0)\varphi'(a) + f_z(\mathrm{P}_0)\psi'(a) = 0$$

これを

$$\left(\nabla(f)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \psi'(a) \end{pmatrix} \right) = 0$$

と見ます.

Chaine Rule(2)

他方 $g_1(x, \varphi(x), \psi(x)) = g_2(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0$ を x で微分して

$$g_{1x}(\mathrm{P}_0) + g_{1y}(\mathrm{P}_0)\varphi'(a) + g_{1z}(\mathrm{P}_0)\psi'(a) = 0$$

$$g_{2x}(\mathrm{P}_0) + g_{2y}(\mathrm{P}_0)\varphi'(a) + g_{2z}(\mathrm{P}_0)\psi'(a) = 0$$

これを

$$\left(\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \psi'(a) \end{pmatrix}\right) = \left(\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0), \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \psi'(a) \end{pmatrix}\right) = 0$$

これから

$$N^{\perp} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \psi'(a) \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad N = \left(\mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \psi'(a) \end{pmatrix}\right)^{\perp}$$

が分かります.

結論

$\nabla(f)(\mathrm{P}_0) \in \left(\mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \psi'(a) \end{pmatrix}\right)^{\perp} = N$ から

$$\nabla(f)(\mathrm{P}_0) = -\lambda\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) - \mu\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0)$$

を満たす $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ が存在します.

定理

$\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) \nparallel \nabla(g_2)(\mathrm{P}_0)$，　$g_1(\mathrm{P}_0) = g_2(\mathrm{P}_0) = 0$ を仮定します．P_0 で極大（極小）ならば

$$\begin{cases} \nabla(f)(\mathrm{P}_0) + \lambda\nabla(g_1)(\mathrm{P}_0) + \mu\nabla(g_2)(\mathrm{P}_0) = \vec{0} \\ g_1(\mathrm{P}_0) = 0 \\ g_2(\mathrm{P}_0) = 0 \end{cases}$$