Lagrange の未定乗数法

3 変数 1 制約条件の場合

Nobuyuki TOSE

December 03, 2019
2020 経済数学・経済数学入門

問題

$\mathbf{R}^3$ の開集合 U 上の関数

$$f:\ U \to \mathbf{R},\ g:\ U \to \mathbf{R}$$

が与えられているとします.

$$\text{問題}\quad g(x,y,z)=0 \quad \text{の下で} \quad w=f(x,y,z) \quad \text{を最大化・最小化}$$

$\mathrm{P}_0(a,b,c) \in U$ において

$$g_z(\mathrm{P}_0) \neq 0, \quad g(P_0)=0$$

を仮定する.

陰関数定理

陰関数定理を用いると P_0 の近くで曲面 $g(x, y, z) = 0$ は

$$z = \varphi(x, y)$$

と表される．

$$F(x, y) := f(x, y, \varphi(x, y))$$

と定めると，P_0 で極大（極小）ならば

$$F_x(a, b) = F_y(a, b) = 0$$

となる．

Chain Rule

F_x,F_y を求めると

$$F_x(a,b) = f_x(\mathrm{P}_0) + f_z(\mathrm{P}_0)\cdot\varphi_x(a,b) = 0$$

$$F_y(a,b) = f_y(\mathrm{P}_0) + f_z(\mathrm{P}_0)\cdot\varphi_y(a,b) = 0$$

となる．$g(x,y,\varphi(x,y)) \equiv 0$ から

$$g_x(\mathrm{P}_0) + g_z(\mathrm{P}_0)\cdot\varphi_x(a,b) = 0$$

$$g_y(\mathrm{P}_0) + g_z(\mathrm{P}_0)\cdot\varphi_y(a,b) = 0$$

となるから

$$\varphi_x(a,b) = -\frac{g_x(\mathrm{P}_0)}{g_z(\mathrm{P}_0)}, \quad \varphi_y(a,b) = -\frac{g_y(\mathrm{P}_0)}{g_z(\mathrm{P}_0)},$$

未定乗数

代入すると

$$F_x(a,b) = f_x(\mathrm{P}_0) - f_z(\mathrm{P}_0) \cdot \frac{g_x(\mathrm{P}_0)}{g_z(\mathrm{P}_0)} = 0$$

$$F_y(a,b) = f_y(\mathrm{P}_0) - f_z(\mathrm{P}_0) \cdot \frac{g_y(\mathrm{P}_0)}{g_z(\mathrm{P}_0)} = 0$$

となります.

$$\lambda = -\frac{f_z(\mathrm{P}_0)}{g_z(\mathrm{P}_0)}$$

と定めると

$$f_x(\mathrm{P}_0) + \lambda g_x(\mathrm{P}_0) = 0,\ \ f_y(\mathrm{P}_0) + \lambda g_y(\mathrm{P}_0) = 0,\ \ f_z(\mathrm{P}_0) + \lambda g_z(\mathrm{P}_0) = 0$$

定理

$$g_z \mathrm{P}_0) \neq 0,\ g(\mathrm{P}_0) = 0$$

のとき，P_0 で極大（または極小）ならば，ある $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在して

$$\begin{cases} f_x(\mathrm{P}_0) & + & \lambda g_x(\mathrm{P}_0) & = & 0 \cdots (1) \\ f_y(\mathrm{P}_0) & + & \lambda g_y(\mathrm{P}_0) & = & 0 \cdots (2) \\ f_z(\mathrm{P}_0) & + & \lambda g_z(\mathrm{P}_0) & = & 0 \cdots (3) \\ & & g(\mathrm{P}_0) & = & 0 \cdots (4) \end{cases}$$

接平面条件

(1),(2),(3) は

$$\nabla(f)(\mathrm{P}_0) = -\lambda\nabla(g)(\mathrm{P}_0)$$

とみると，曲面 $g(x, y, z) = 0$ と曲面 $f(x, y, z) = f(\mathrm{P}_0)$ が P_0 で接していることを意味する．