IX 演習 5.10（教科書 139 ページ）次の行列 A に対して $\ker(A)$ と $\mathrm{Im}(A)$ の基底を求めましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -7 & 6 \\ 2 & 10 & -2 & -8 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \underset{(i)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -3 & -21 \end{pmatrix} \underset{(ii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -21 \end{pmatrix}$$
$$\underset{(iii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+ = 1r \times (-2),\ 3r+ = 1r \times (-5) \\ (ii) &\quad 2r\times = (-1) \\ (iii) &\quad 1r+ = 2r \times (-2),\ 3r+ = 1r \times 3 \end{aligned}$$

を施します．この結果で得られた狭義の階段行列 B の列ベクトルに関して

$$\vec{b}_3 = -8\vec{b}_1 + 7\vec{b}_2 \tag{1}$$

が成立します．また正則行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ が存在して

$$PA = B \quad 従って \quad P\vec{a}_j = \vec{b}_j\ (j = 1, 2, 3)$$

が成立します．このことから (1) の両辺に P^{-1} を掛けて

$$\vec{a}_3 = -8\vec{a}_1 + 7\vec{a}_2$$

が成立することが分かります．$\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ とすると

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + v_3\vec{a}_3 \\ &= v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + v_3(-8\vec{a}_1 + 7\vec{a}_2) \\ &= (v_1 - 8v_3)\vec{a}_1 + (v_2 + 7v_3)\vec{a}_2 \end{aligned}$$

から $\vec{v} \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ であることが分かります．また上の行基本変形から

$$\begin{aligned} x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad x\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + y\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0 \end{aligned}$$

であることが分かりますから，$\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ が線型独立であることが従います．よって $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は $\mathrm{Im}(A)$ の基底であることが示されました．

　他方，上の行基本変形から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & - & 8z & = & 0 \\ & & y & + & 7z & = & 0 \end{array} \right.$$

となりますから $\ker(A)$ のベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8z \\ -7z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されます．よって $\ker(A)$ の基底として $\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ がとれます．

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -7 & 6 \\ 2 & 10 & -2 & -8 \end{pmatrix} \underset{(i)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & -9 \\ 0 & 14 & 4 & -18 \end{pmatrix}$$
$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & 14 & 4 & -18 \end{pmatrix} \underset{(iii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{17}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3\ \vec{b}_4)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+ = 1r \times (-3),\ 3r+ = 1r \times (-2) \\ (ii) &\quad 2r\times = \frac{1}{7} \\ (iii) &\quad 1r+ = 2r \times 2,\ 3r+ = 1r \times (-14) \end{aligned}$$

を施します．この結果で得られた狭義の階段行列 B の列ベクトルに関して

$$\vec{b}_3 = -\frac{17}{7}\vec{b}_1 + \frac{2}{7}\vec{b}_2, \quad \vec{b}_4 = \frac{17}{7}\vec{b}_1 - \frac{9}{7}\vec{b}_2 \tag{2}$$

が成立します．また正則行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ が存在して

$$PA = B \quad 従って \quad P\vec{a}_j = \vec{b}_j\ (j = 1, 2, 3, 4)$$

が成立します．このことから (2) の両辺に P^{-1} を掛けて

$$\vec{a}_3 = -\frac{17}{7}\vec{a}_1 + \frac{2}{7}\vec{a}_2, \quad \vec{a}_4 = \frac{17}{7}\vec{a}_1 - \frac{9}{7}\vec{a}_2$$

が成立することが分かります．$\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ とすると

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + v_3\vec{a}_3 + v_4\vec{a}_4 \\ &= v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + v_3(-\frac{17}{7}\vec{a}_1 + \frac{2}{7}\vec{a}_2) + v_4(\frac{17}{7}\vec{a}_1 - \frac{9}{7}\vec{a}_2) \\ &= (v_1 - \frac{17}{7}v_3 + \frac{17}{7}v_4)\vec{a}_1 + (v_2 + \frac{2}{7}v_3 - \frac{9}{7}v_4)\vec{a}_2 \end{aligned}$$

から $\vec{v} \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ であることが分かります．また上の行基本変形から

$$\begin{aligned} x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad x\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + y\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0 \end{aligned}$$

であることが分かりますから，$\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ が線型独立であることが従います．よって $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は $\mathrm{Im}(A)$ の基底であることが示されました．

他方，上の行基本変形から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \ker(A) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & & & - & \frac{17}{7}z & + & \frac{17}{7}w & = & 0 \\ & & y & + & \frac{2}{7}z & - & \frac{9}{7}w & = & 0 \end{array} \right.$$

となりますから $\ker(A)$ のベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7}z - \frac{17}{7}w \\ -\frac{2}{7} + \frac{9}{7}w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \frac{z}{7}\begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{w}{7}\begin{pmatrix} -17 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

と表されます．よって $\ker(A)$ は $\left(\begin{smallmatrix} 17 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix} -17 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ で生成されます．さらに

$$c_1 \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{smallmatrix} -17 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

とすると，この左辺は $\left(\begin{smallmatrix} * \\ \\ 7c_1 \\ 7c_2 \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$ となりますから $c_1 = c_2 = 0$ が分かります．よって $\left(\begin{smallmatrix} 17 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix} -17 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ は線型独立であることも分かります．以上から $\left(\begin{smallmatrix} 17 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix} -17 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ は $\ker(A)$ の基底であることが示されました．