

IX 演習 5.9 (教科書 137 ページ) 次のベクトルの組み合わせが, 線型独立か線型従属か判定しましょう.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解答 (1)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と行基本変形

$$(i) \quad 2r_+ = 1r, \quad 3r_+ = 1r \times (-2)$$

$$(ii) \quad 2r_+ = \frac{1}{5}$$

$$(iii) \quad 1r_+ = 2r \times (-2), \quad 3r_+ = 2r \times 3$$

を施します. これから

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

であることが分かります. $x = -3, y = -2, z = 1$ は右側の条件を満たしますから

$$-3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が成立することが分かります. 従って与えられたベクトルは線型従属です.

(2)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(iv)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(v)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と行基本変形

$$(i) \quad 2r+ = 1r \times (-3), \quad 3r+ = 1r \times 2$$

$$(ii) \quad 2r \times = -\frac{1}{5}$$

$$(iii) \quad 1r+ = 2r \times (-1), \quad 3r+ = 2r \times (-5)$$

$$(iv) \quad 3r \times = \frac{1}{6}$$

$$(v) \quad 1r+ = 3r \times (-1), \quad 2r+ = 3r \times (-1)$$

と施すと

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0$$

であることが分かります。よって、与えられたベクトルは線型独立です。