VIII 演習 5.8 （教科書 137 ページ） $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ に対して $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ となる条件を行列によって $B\vec{v} = \vec{0}$ と表しましょう．

解答

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & 4 & 3 & y \\ 3 & 1 & 2 & z \\ 1 & 3 & 2 & w \end{pmatrix} \xrightarrow[(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & -2x+y \\ 0 & -2 & -1 & -3x+z \\ 0 & 2 & 1 & -x+w \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(ii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & -5x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-y+w \end{pmatrix} \xrightarrow[(iii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -x+\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 0 & -5x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-y+w \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(iv)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2x-\frac{1}{2}y \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -x+\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 0 & -5x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-y+w \end{pmatrix}$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} &(i) && 2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r\times(-3),\ 4r+=1r\times(-1) \\ &(ii) && 3r+=2r,\ 4r+=2r\times(-1) \\ &(iii) && 2r\times=\frac{1}{2} \\ &(iv) && 1r+=2r\times(-1) \end{aligned}$$

を施します．$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ と列ベクトル表示をすると $\vec{v} = {}^t(x\ y\ z\ w)$ に対して

$$\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} c_1 & & & + & \frac{1}{2}c_3 & = & 2x-\frac{1}{2}y \\ & & c_2 & + & \frac{1}{2}c_3 & = & -x+\frac{1}{2}y \\ 0c_1 & + & 0c_2 & + & 0c_3 & = & -5x+y+z \\ 0c_1 & + & 0c_2 & + & 0c_3 & = & x-y+w \end{array} \right.$$

が成立します．もし

$$-5x+y+z \neq 0 \quad \text{または} x-y+w \neq 0$$

ならば右側の条件が成立しませんから $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ ならば

$$-5x + y + z = 0 \quad \text{かつ} \, x - y + w = 0 \tag{1}$$

が必要であることが分かります．逆に (1) が成立するならば

$$c_1 = 2x - \frac{1}{2}y,\ c_2 = -x + \frac{1}{2}y,\ c_3 = 0$$

が

$$\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 \in \mathrm{Im}(A)$$

を満たします．従って (1) が $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ の必要十分条件で

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

と表されます．