VII 演習 5.7（教科書 136 ページ） $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$ であるための a, b, c に関する条件を求めましょう．

解答

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ -1 & 3 & 1 & b \\ 2 & -4 & 0 & c \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 3 & 3 & a+b \\ 0 & -4 & -4 & -2a+c \end{array}\right)$$
$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \\ 0 & -4 & -4 & -2a+c \end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b+c \end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) \quad & 2r+=1r,\ 3r+=1r\times(-2) \\ (ii) \quad & 2r\times=\frac{1}{3} \\ (iii) \quad & 3r+=2r\times 4 \end{aligned}$$

を施します．これから

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & a \\ & & y & + & z & = & \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & -\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b+c \end{array} \right.$$

であることが分かります．この条件を満たす $x, y, z \in \mathbf{R}$ が存在することが

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$$

ですので，求める条件が

$$-\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b+c=0 \quad \text{すなわち} \quad -2a+4b+3c=0$$

であることが分かります．