**VI 演習 5.6 （教科書 136 ページ)**

$$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$$

が線型独立であるとします．このとき

$$\vec{x}_1, \vec{x}_1+\vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$$

が線型独立であることを示しましょう．

解答（その１） $k$ に関する帰納法で証明します．$k=1$ の場合は自明です．次に $(k-1)$ の場合，すなわち

$$\begin{aligned}&\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{k-1} \text{ が線型独立である}\\ \Rightarrow &\vec{x}_1, \vec{x}_1+\vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_{k-1} \text{ が線型独立である}\end{aligned}$$

が成立することを仮定します．このとき

$$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_k \text{ が線型独立である} \tag{1}$$

であると仮定します．このとき

$$c_1\vec{x}_1 + c_2(\vec{x}_1+\vec{x}_2) + \cdots + c_k(\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_k) = \vec{0} \tag{2}$$

とします．この (2) の左辺を整理すると

$$(c_1+\cdots+c_k)\vec{x}_1 + (c_2+\cdots+c_k)\vec{x}_2 + \cdots + (c_{k-1}+c_k)\vec{x}_{k-1} + c_k\vec{x}_k = \vec{0}$$

が従います．(1) から

$$c_1+c_2+\cdots+c_k = c_2+\cdots+c_k = \cdots = c_{k-1}+c_k = c_k = 0$$

が分かります．特に $c_k=0$ が成立することを用いると (2) から

$$c_1\vec{x}_1 + c_2(\vec{x}_1+\vec{x}_2) + \cdots + c_{k-1}(\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_{k-1}) = \vec{0} \tag{3}$$

が従います．(1) から

$$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{k-1} \text{ が線型独立である}$$

ことが成立しますから，帰納法の仮定すなわち $(k-1)$ の場合が成立することを仮定していますから

$$\vec{x}_1, \vec{x}_1+\vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_{k-1} \text{ が線型独立である}$$

が従います．このことから (3) から

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{k-1} = 0$$

が導けます．以上で

$$\begin{aligned} &c_1\vec{x}_1 + c_2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \cdots + c_k(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_k) = \vec{0} \\ \Rightarrow &c_1 = \cdots = c_{k-1} = c_k = 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$\vec{x}_1, \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_k \text{ が線型独立である}$$

ことが証明できました．
（その２）

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1,\ \vec{y}_2 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_k$$

と定めます．すると

$$(\vec{y}_1\ \cdots\ \vec{y}_k) = (\vec{x}_1\ \cdots\ \vec{x}_k)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

が成立します．この右辺に現れる $k$ 次正方行列（上三角行列）

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

は

$$|Q| = 1$$

を満たしますから正則です．従って演習 5.5 から $\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_k$ が線型独立であることが従います．