IV 演習 5.4 (教科書 136 ページ) $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ とします．$P \in M_n(\mathbf{R})$ が正則であるとき

$$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \text{が線型独立} \Rightarrow P\vec{x}_1, \cdots, P\vec{x}_k \text{が線型独立}$$

を示しましょう．

解答

$$c_1 P\vec{x}_1 + \cdots + c_k P\vec{x}_k = \vec{0}$$

とします.

$$P(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k) = c_1 P\vec{x}_1 + \cdots + c_k P\vec{x}_k$$

から

$$P(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k) = \vec{0}$$

が成立することが分かります．この両辺に P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}P(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k) = I_n(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k) = c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k$$

から

$$c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k = \vec{0}$$

が従います．$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k$ が線型独立であることから $c_1 = \cdots = c_k = 0$ であることが分かります．以上で $P\vec{x}_1, \cdots, P\vec{x}_k$ が線型独立であることが示されました.