II 演習 5.2 （教科書 132 ページ） $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\0\\c\end{pmatrix}$ が $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{x}_2=\begin{pmatrix}6\\6\\8\end{pmatrix}$ の線型結合となる必要十分条件を求めましょう．

解答

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 2\\ 3 & 6 & 0\\ -1 & 8 & c\end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 3 & 6 & 0\\ -1 & 8 & c\end{array}\right)$$

$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & \frac{19}{2} & c+\frac{1}{2}\end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & \frac{19}{2} & c+\frac{1}{2}\end{array}\right) \underset{(iv)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & c-10\end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i)&\quad 1r\times=\frac{1}{4}\\ (ii)&\quad 2r+=1r\times(-3),\ 3r+=1r\\ (iii)&\quad 2r\times=\frac{3}{2}\\ (iv)&\quad 3r+=2r\times\left(-\frac{19}{2}\right) \end{aligned}$$

を施します．これから

$$c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2=\vec{w} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} c_1 & & & = & 2\\ & & c_2 & = & -1\\ 0c_1 & + & 0c_2 & = & c-10 \end{cases} \qquad (\#)$$

であることが分かります．従って，$c\neq 10$ のときこの条件を満たす $c_1, c_2\in$ $\mathbf{R}$ が存在しませんから，$\vec{w}$ は x_1, x_2 の線型結合としては表されません．他方 $c=10$ のとき

$$\vec{w}=2\vec{x}_1-\vec{x}_2$$

となります．以上で

$$\vec{w}\in L(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\quad\Leftrightarrow\quad c=10$$

であることが示されました．