

2017年7月7日確認問題

I 演習 5.1 (教科書 131 ページ) V と W を \mathbf{R}^n の部分空間とします.
このとき $V \cap W$ と

$$V + W := \{\vec{v} + \vec{w}; \vec{v} \in V, \vec{w} \in W\}$$

$$V^\perp = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n; (\vec{x}, \vec{v}) = 0 \text{ (すべての } \vec{v} \in V)\}$$

が \mathbf{R}^n の部分空間であることを示しましょう (V^\perp を V の直交補空間と呼びます).

解答 (i) $\vec{x}, \vec{y} \in V + W$ とします. このとき $\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{w}_1, \vec{y} = \vec{v}_2 + \vec{w}_2$ を満たす $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ と $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ が存在します. すると

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \lambda(\vec{v}_1 + \vec{w}_1) + \mu(\vec{v}_2 + \vec{w}_2) = (\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) + (\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2)$$

において $\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V, \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 \in W$ から

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V + W$$

が成立します.

(ii) $\vec{x}, \vec{y} \in V \cap W$ とします. このとき $\vec{x}, \vec{y} \in V$ かつ $\vec{x}, \vec{y} \in W$ が成立します. V と W が部分空間ですから

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V \quad \text{かつ} \quad \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in W$$

が成立します. これは

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V \cap W$$

を意味します.

(iii) $\vec{x}, \vec{y} \in V^\perp$ とします. このとき任意の $\vec{v} \in V$ に対して $(\vec{x}, \vec{v}) = (\vec{y}, \vec{v}) = 0$ が成立します. すると

$$(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{v}) = \lambda(\vec{x}, \vec{v}) + \mu(\vec{y}, \vec{v}) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

から $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V^\perp$ が従います.