

IV 演習 4.11 (教科書 100 ページ) ベクトルの外積について以下の性質が成立することを示しましょう.

(1)  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ,  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$  (2)  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

解答 (1)  $\vec{a} = {}^t(a_1 \ a_2 \ a_3)$ ,  $\vec{b} = {}^t(b_1 \ b_2 \ b_3)$  とします. このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

となります. さらに

$$\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a}$$

から

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

が従います.

(2) さらに  $\vec{c} = {}^t(c_1 \ c_2 \ c_3)$  とすると

$$\vec{a} + \vec{b} = {}^t(a_1 + b_1 \ a_2 + b_2 \ a_3 + b_3)$$

となりますから

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_3 + b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

が従います.