XI 演習 3.13（教科書 80 ページ）$\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbf{R}^n$ が関係式

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} & = & \vec{a} \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} & = & \vec{b} \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} & = & \vec{c} \end{cases}$$

満たしているとします．このとき $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表しましょう．これはある行列の逆行列を計算して表しましょう．

解答 与えられた $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ に関する関係式を

$$(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right) \tag{1}$$

と表現します．ここで

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めます．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(i)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(ii)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(iii)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(iv)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[(v)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(vi)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned}
(i) \quad & 2r+=1r,\ 3r+=1r\times(-2) \\
(ii) \quad & 3r+=2r\times 2 \\
(iii) \quad & 2r \leftrightarrow 3r \\
(iv) \quad & 1r+=2r\times(-2),\ 3r+=2r\times(-3) \\
(v) \quad & 3r\times\frac{1}{10} \\
(vi) \quad & 1r+=3r\times(-9),\ 3r+=2r\times 3
\end{aligned}$$

を施します．この計算から

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{7}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

が分かります．A^{-1} を (1) の右側から掛けると

$$\begin{aligned}
(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}) &= \left(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{7}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{10}\vec{a}+\frac{3}{10}\vec{b}+\frac{1}{10}\vec{c} \quad \frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c} \quad \frac{7}{10}\vec{a}+\frac{1}{10}\vec{b}-\frac{3}{10}\vec{c}\right)
\end{aligned}$$

であることが導けます.

参考 Maxima による検算

```
(%i1) A: matrix([1,2,3],[-1,1,-2],[2,-1,1]);
                                [  1    2    3  ]
                                [               ]
(%o1)                           [ - 1   1   - 2 ]
                                [               ]
                                [  2   - 1   1  ]
(%i2) invert(A);
                                [ 1     1     7   ]
                                [ --    -     --  ]
                                [ 10    2     10  ]
                                [                 ]
                                [ 3     1     1   ]
(%o2)                           [ --    -     --  ]
                                [ 10    2     10  ]
                                [                 ]
                                [ 1      1     3  ]
                                [ --   - -   - -- ]
                                [ 10     2     10 ]
```