XIV 演習 3.12（教科書 79 ページ） 次の行列の逆行列が存在すれば求めましょう.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(i)]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(ii)]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(iii)]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(iv)]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(v)]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+ = 1r \times (-2),\ 3r+ = 1r \times (-3),\ 4r+ = 1r \times (-1) \\ (ii) &\quad 1r+ = 2r \times (-1),\ 4r+ = 2r \times (-1) \\ (iii) &\quad 3r \leftrightarrow 4r \\ (iv) &\quad 1r+ = 3r \times (-2),\ 4r+ = 3r \times 3 \\ (v) &\quad 2r+ = 4r,\ 3r+ = 2r \times (-1) \end{aligned}$$

を施します. この結果から A は正則で

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

であることが分かります.

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(i)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(ii)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(iii)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(iv)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(iv)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

と行基本変形

$$
\begin{aligned}
(i)\quad & 1r \leftrightarrow 3r \\
(ii)\quad & 1r\times = (-1) \\
(iii)\quad & 2r+ = 1r \times (-2),\ 3r+ = 1r \times (-2) \\
(iv)\quad & 2r\times = \frac{1}{5},\ 3r\times = \frac{1}{2} \\
(v)\quad & 1r+ = 2r,\ 1r+ = 3r \times (-1)
\end{aligned}
$$

を施します．この結果から A は正則で

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

であることが分かります.