XI 演習問題 3.9（教科書 72 ページ） $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ とします．$A\vec{x} = \vec{b}$ に解が存在する条件を求めましょう．

解答

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+=1r\times(-4) \\ (ii) &\quad 2r\times=(-1) \\ (iii) &\quad 1r+=2r\times(-1),\ 3r+=2r\times(-2) \end{aligned}$$

を用いて変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3b_1 + b_2 \\ 4b_1 - b_2 \\ -8b_1 + 2b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．従って解が存在するならば

$$0x + 0y + 0z = -8b_1 + 2b_2 + b_3$$

が成立しますが，$-8b_1+2b_2+b_3 \neq 0$ ならば矛盾が生じます．従って解が存在するならば $-8b_1+2b_2+b_3=0$ が必要であることが分かります．逆に

$$-8b_1 + 2b_2 + b_3 = 0$$

ならば与えられた方程式は

$$\begin{cases} x \qquad - z = -3b_1 + b_2 \\ \qquad y + 2z = 4b_1 - b_2 \end{cases}$$

と必要十分で解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 3b_1 + b_2 \\ -2\alpha + 4b_1 - b_2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

を持ちます．