**X 演習問題 3.8（教科書 72 ページ）** 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ x-3y+2z &= 4 \\ 3x-2y+z &= c \end{cases}$$

に解が存在する条件を求めましょう．

**解答**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & c \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & c \end{array}\right)$$
$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -5 & -7 \\ 0 & 7 & -5 & c-12 \end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & c-5 \end{array}\right)$$

と拡大行列は行基本変形されます．ここで行基本変形

$$\begin{aligned} (i)&1r \leftrightarrow 2r \\ (ii)&2r+ = 1r \times (-2),\ 3r+ = 1r \times (-3) \\ (iii)&3r+ = 2r \times (-1) \end{aligned}$$

を用いました．$c \neq 5$ とすると，与えられた方程式を $(x, y, z)$ が満たすならば

$$0x+0y+0z = c-5$$

が成立しますが，これはあり得ません．従って解が存在するならば

$$c = 5$$

が必要であることが分かります．逆に $c = 5$ のとき与えられた方程式の拡大行列はさらに

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{(iv)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\underset{(v)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (iv) &\quad 2r \times \frac{1}{7} \\ (v) &\quad 1r+ = 2r \times 3 \end{aligned}$$

によって変形されます．従って与えられた方程式は

$$\begin{cases} x \qquad - \frac{1}{7}z &= 1 \\ \qquad y - \frac{5}{7}z &= -1 \end{cases}$$

と必要十分で解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}\alpha + 1 \\ \frac{5}{7}\alpha - 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が存在することが分かります．以上で解が存在する必要十分条件が $c = 5$ であることが示されました．