II 演習問題 3.7（教科書 72 ページ） 次の拡大行列が表す連立 1 次方程式に解が存在するかについて調べ，解が存在するならば求めましょう．

(1) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$ **(2)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 11 \\ 6 & 20 & -6 & 3 \\ 0 & 6 & -18 & 1 \end{array}\right)$

解答 (1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -6 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & -6 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -1 \\ 0 & 5 & -6 & -2 & -5 \end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と拡大行列は行基本変形によって狭義の階段行列になります．ここで

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+=1r\times(-3),\ 3r+=1r\times(-4) \\ (ii) &\quad 2r\times=\frac{1}{5} \\ (iii) &\quad 1r+=2r,\ 3r+=2r\times(-5) \end{aligned}$$

という変形を用いました．この結果与えられた方程式は

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & \frac{4}{5}z & + & \frac{3}{5}w & = & 1 \\ & & y & - & \frac{6}{5}z & - & \frac{2}{5}w & = & -1 \end{array}\right.$$

と必要十分ですから解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}\alpha-\frac{3}{5}\beta+1 \\ \frac{6}{5}\alpha+\frac{2}{5}\beta-1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となります．

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 11 \\ 6 & 20 & -6 & 3 \\ 0 & 6 & -18 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(i)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & -6 & -30 \\ 0 & 6 & -18 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[(ii)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & -6 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 91 \end{array}\right)$$

と拡大行列は行基本変形されます．ここで行基本変形

$$\begin{array}{rl} (i) & 2r+ = 1r \times (-3) \\ (ii) & 3r+ = 2r \times (-3) \end{array}$$

を用いました．与えられた方程式を (x, y, z) が満たすと

$$0x + 0y + 0z = 91$$

が成立しますが，これはあり得ません．従って与えられた方程式に解が存在しないことが分かります.