2017 年 7 月 21 日演習問題

I 演習問題 3.6（教科書 69 ページ） 以下の A_0 に対して斉次方程式 $A_0\vec{x}=\vec{0}$ を解きましょう.

$$O_3,\ \begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&\alpha\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&\alpha\\0&1&\beta\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解答

(0-1) $\underline{A_0=O_3\text{ のとき}}$　任意の $\vec{x}\in\mathbf{K}^3$ が $A_0\vec{x}=\vec{0}$ を満たしますから，解は $\vec{x}\in\mathbf{K}^3$ すべてとなります.

注意 任意の $\vec{x}\in\mathbf{K}$ が

$$\vec{x}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

で

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\text{は線型独立である}$$

ので

$$\dim\ker(A_0)=\dim\mathbf{K}^3=3$$

(1-1) $\underline{A_0=\begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ のとき}}$

$$A_0\vec{x}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad x_1+\alpha x_2+\beta x_3=0$$

であるので解は

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-\alpha x_2-\beta x_3\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-\alpha\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-\beta\\0\\1\end{pmatrix}$$

が解となります.

<u>注意</u>

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \dim\ker(A_0) = 2$$

であることが分かります.

(1-2) $\underline{A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ のとき}}$

$$A_0\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 + \alpha x_3 = 0$$

であるので解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\alpha x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

が解となります.

<u>注意</u>

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \dim\ker(A_0) = 2$$

であることが分かります.

(1-3) $\underline{A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ のとき}}$

$$A_0\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 0$$

であるので解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が解となります.

<u>注意</u>

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \dim\ker(A_0) = 2$$

であることが分かります.

(2-1) $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$A_0\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + \alpha x_3 = 0,\ x_2 + \beta x_3 = 0$$

であるので解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha x_3 \\ -\beta x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

が解となります.

注意

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \text{から} \quad \dim\ker(A_0) = 1$$

であることが分かります.

(2-2) $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$A_0\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + \alpha x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

であるので解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が解となります.

注意

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \text{から} \quad \dim\ker(A_0) = 1$$

であることが分かります.

(2-3) $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$A_0\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

であるので解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が解となります.

<u>注意</u>

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \text{から} \quad \dim \ker(A_0) = 1$$

であることが分かります.