IX 演習 3.5（教科書 67 ページ） 以下の行列 A に対して斉次方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ を解きましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 4 & -12 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

解答 **(1)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{(i)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{(ii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{(iii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r\times(-3) \\ (ii) &\quad 2r\times=\left(-\frac{1}{3}\right) \\ (iii) &\quad 1r+=2r\times(-2),\ 3r+=2r\times 3 \end{aligned}$$

を施します．これから

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & + & \frac{2}{3}x_3 & + & \frac{5}{3}x_4 & = & 0 \\ & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & - & \frac{1}{3}x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

であることが分かります．$x_3=\alpha,\ x_4=\beta$ とおくと解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\alpha-\frac{5}{3}\beta \\ \frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表せます．

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 4 & -12 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{(i)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{(ii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\underset{(iv)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r\times(-4) \\ (ii) &\quad 2r\times=\frac{1}{2} \\ (iii) &\quad 3r+=2r\times(-3) \end{aligned}$$

を施します．これから

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 3x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

であることが分かります．$x_2=\alpha,\ x_4=\beta$ とおくと解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\alpha-2\beta \\ \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表せます.