

## 第 7 章演習解答

演習 7.1 (1)  $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  (2)  $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

演習 7.2 (7.8) について

( $\Rightarrow$ ) は明らかです. ( $\Leftarrow$ ) は,  $y = \vec{a}$  とすると

$$(\vec{a}, \vec{a}) = \|\vec{a}\|^2 = 0$$

から  $\vec{a} = \vec{0}$  が従うことから分かります.

(7.9) について ( $\Rightarrow$ ) は明らかです. ( $\Leftarrow$ ) は,  $C = \vec{c}_1 \vec{c}_2$  と列ベクトル表示をすると

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c}_1 = \vec{0}$$

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c}_1 = \vec{0}$$

から  $C = (\vec{0} \vec{0}) = O_2$  となることから分かります.

演習 7.3  $P_1 P_2$  について

$${}^t(P_1 P_2) P_1 P_2 = {}^t P_2 {}^t P_1 P_1 P_2 = {}^t P_2 I_2 P_2 = {}^t P_2 P_2 = I_2$$

$$P_1 P_2 {}^t(P_1 P_2) = P_1 P_2 {}^t P_2 {}^t P_1 = P_1 I_2 {}^t P_1 = P_1 {}^t P_1 = I_2$$

から  $P_1 P_2$  は直交行列になります.

${}^t P_1 = P_1^{-1}$  について

$${}^t({}^t P_1) {}^t P_1 = P_1 {}^t P_1 = I_2$$

$${}^t P_1 {}^t({}^t P_1) = {}^t P_1 P_1 = I_2$$

から  ${}^t P_1$  が直交であることが分かります.

## 演習 7.4

$$\begin{aligned} Q^2 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

が成立しますから、正則行列の定義から  $Q$  は正則となり、 $Q^{-1} = Q$  が従います。

演習 7.5  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とすると

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \left( x \cos \frac{\alpha}{2} + y \sin \frac{\alpha}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} & \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \left( 2 \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} & \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} - I_2 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 & 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \\ 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} & \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \vec{v} \end{aligned}$$

となります。よって

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

であることが分かります。

**演習 7.6** (1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  を直交行列で対角化しましょう。

(2) 制約条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

の下で

$$z = \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

の最大値・最小値を求めましょう。

**解答 (1)** まず  $A$  の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)^2 - (-1)^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = -1, 3$  であることが分かります。次に  $\lambda = -1, 3$  に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i)  $\lambda = 3$  のとき、

$$A\vec{v} = 3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii)  $\lambda = 1$  のとき、

$$A\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで  $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  により  $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$  と定めると、 $P$  は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (3\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から  $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$  と  $A$  は対角化できます。

(2)  $A$  が定める 2 次形式を (1) で用いた回転座標変換を適用します。 $P$  が回転行列ですから  $P^{-1}$  も回転行列で

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left( P^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( P^{-1} A P \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= 3\xi^2 + \eta^2 \end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

さらに制約条件は

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

となりますから、制約条件を用いて  $\eta$  を消去すると

$$z = 3\xi^2 + \eta^2 = 3\xi^2 + (1 - \xi^2) = 1 + 2\xi^2 \geq 1$$

となりますから、制約条件の下で  $z \geq 1$  であることが分かります。さらに最後の等号が  $\xi = 0$  従って  $\eta = \pm 1$  のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_2$$

において  $z$  は最小値 1 を取ることが分かります。

他方、制約条件を用いて  $\xi$  を消去すると

$$z = 3\xi^2 + \eta^2 = 3(1 - \eta^2) + \eta^2 = 3 - 2\eta^2 \leq 3$$

となりますから、制約条件の下で  $z \leq 3$  であることが分かります。さらに最後の等号が  $\eta = 0$  従って  $\xi = \pm 1$  のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_1$$

において  $z$  は最小値 3 を取ることが分かります。

**演習 7.6B** (1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  を直交行列で対角化しましょう。

(2) 制約条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

の下で

$$z = \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x^2 + 4xy + y^2$$

の最大値・最小値を求めましょう。

**解答** (1) まず  $A$  の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2 - (-2)^2 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = -1, 3$  であることが分かります。次に  $\lambda = -1, 3$  に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i)  $\lambda = 3$  のとき、

$$A\vec{v} = 3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii)  $\lambda = -1$  のとき、

$$A\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで  $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  により  $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$  と定めると、 $P$  は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (3\vec{p}_1 \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から  $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$  と  $A$  は対角化できます。

(2)  $A$  が定める2次形式を(1)で用いた回転座標変換を適用します。 $P$  が回転行列ですから  $P^{-1}$  も回転行列で

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left( P^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( P^{-1} A P \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= 3\xi^2 - \eta^2 \end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

さらに制約条件は

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

となりますから、制約条件を用いて  $\eta$  を消去すると

$$z = 3\xi^2 - \eta^2 = 3\xi^2 - (1 - \xi^2) = -1 + 4\xi^2 \geq -1$$

となりますから、制約条件の下で  $z \geq -1$  であることが分かります。さらに最後の等号が  $\xi = 0$  従って  $\eta = \pm 1$  のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_2$$

において  $z$  は最小値  $-1$  を取ることが分かります。

他方、制約条件を用いて  $\xi$  を消去すると

$$z = 3\xi^2 - \eta^2 = 3(1 - \eta^2) - \eta^2 = 3 - 4\eta^2 \leq 3$$

となりますから、制約条件の下で  $z \leq 3$  であることが分かります。さらに最後の等号が  $\eta = 0$  従って  $\xi = \pm 1$  のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_1$$

において  $z$  は最小値  $3$  を取ることが分かります。

**演習 7.7** 以下の対称行列  $A$  を回転行列で対角化して、 $A$  が定める 2 次形式を回転座標変換で簡単にしましょう。

$$(1) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

**解答 (1)** まず  $A$  の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -3 & \lambda - 7 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 7) - (-3)^2 = (\lambda + 2)(\lambda - 8) \end{aligned}$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = -2, 8$  であることが分かります。次に  $\lambda = -2, 8$  に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i)  $\lambda = -2$  のとき、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 3y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となります。

(ii)  $\lambda = 8$  のとき、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで  $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  により  $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  と定めると、 $P$  は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1 \ 8\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

から  $A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$  と  $A$  は対角化できます。さらに  $P$  が回転行列ですから  $P^{-1}$  も回転行列で

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left( P^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( P^{-1} A P \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= -2\xi^2 + 8\eta^2 \end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

(2) まず  $A$  の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -4 & \lambda - 7 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 7) - (-4)^2 = (\lambda - 9)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = -1, 9$  であることが分かります。次に  $\lambda = -1, 3$  に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i)  $\lambda = 9$  のとき、

$$A\vec{v} = 9\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii)  $\lambda = -1$  のとき、

$$A\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで  $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  により  $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$  と定めると、 $P$  は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (9\vec{p}_1 \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から  $A = P \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$  と  $A$  は回転行列  $P$  を用いて対角化できます。ここで  $A$  が定める 2 次形式

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

を考えましょう。 $P^{-1}$  も回転行列ですから、内積を保ちます。このことを用いると

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{v}) &= (P^{-1}A\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= (P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v} \right) \end{aligned}$$

が従います。さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \vec{v} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = 9\xi^2 - \eta^2$$

となります。

**演習 7.8** 対称行列  $A \in M_2(\mathbf{R})$  が定める 2 次形式が正定値であるとし、このとき  $A$  は正則で、 $A^{-1}$  が対称となり、 $A^{-1}$  が定める 2 次形式も正定値となることを示しましょう。

$A$  が定める 2 次形式が正定値ですから、

$$|A| > 0$$

が成立します。よって  $A$  は正則であることが分かります。

$$AA^{-1} = I_2$$

の両辺の転置をとると

$${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^t(A^{-1})A = I_2$$

が成立します。この両変に右から  $A^{-1}$  を掛けると

$${}^t(A^{-1}) = A^{-1}$$

が従いますから、 $A^{-1}$  が対称であることが分かります。 $A$  の固有値  $\alpha, \beta$  は

$$\alpha, \beta > 0$$

となります。このとき回転行列  $R$  が存在して

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成立します。この両辺の逆行列をとると

$$R^{-1}A^{-1}R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

を得ます。

$$\Phi_{A^{-1}}(\lambda) = \Phi_{R^{-1}A^{-1}R} = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{\beta} \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{1}{\alpha})(\lambda - \frac{1}{\beta})$$

から  $A^{-1}$  の固有値が  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} > 0$  と正となります。よって対称な  $A^{-1}$  が定める 2 次形式は正定値となります。

**演習 7.9** 次の 2 次曲線を座標の平行移動と回転座標変換を用いて簡単にしましょう.

$$(1) 2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + (2\sqrt{3} - 4)x + (\sqrt{3} - 4)y + (4 - \sqrt{3}) = 0$$

$$(2) x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 6y = 0$$

$$(3) 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32 = 0$$

$$(4) x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$$

$$(5) x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$$

$$(6) x^2 - 4xy + 4y^2 - 5y - 2 = 0$$

**解答 (1)**

$$2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + (2\sqrt{3} - 4)x + (\sqrt{3} - 4)y + (4 - \sqrt{3}) = 0 \quad (1)$$

は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - 4 \\ \sqrt{3} - 4 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + 4 - \sqrt{3} = 0 \quad (2)$$

と表されます. 平行移動の座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって (2) は

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( 2A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) + 4 - \sqrt{3} = 0$$

となりますから, ここで

$$2A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\vec{b} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - 4 \\ \sqrt{3} - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - 4 \\ \sqrt{3} - 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= 2\sqrt{3} - 6 \end{aligned}$$

と計算されますから (2) は

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - 2 + \sqrt{3} = 0 \quad (3)$$

となります.

次に  $A$  を回転行列で対角化します.  $A$  の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5}{2}\right)$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$  であることが分かります. さらに固有ベクトルを求めます.

$\lambda = \frac{1}{2}$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot x - y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{3} \cdot x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

$\lambda = \frac{5}{2}$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + \sqrt{3} \cdot y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \cdot y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\vec{r}_1 & \frac{5}{2}\vec{r}_2 \end{pmatrix} = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

と  $A$  は回転行列  $R$  によって対角化されます. さらに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) &= \left( AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( {}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\eta^2 \end{aligned}$$

となりますから, この座標で (1) は

$$\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\eta^2 = 2 - \sqrt{3}$$

と表され, 楕円であることが分かります.

(2)

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 6y = 0 \tag{1}$$

は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 0 \tag{2}$$

と表されます.  $|A| = 0$  ですから,  $A$  を回転行列で対角化することから始めます.

$A$  の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5)$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = 0, 5$  であることが分かります. さらに固有ベクトルを求めます.

$\lambda = 0$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

$\lambda = 5$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (0 \cdot \vec{r}_1 \ 5 \cdot \vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

と  $A$  は回転行列  $R$  によって対角化されます. さらに

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left( AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( {}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= 5\eta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left( \vec{b}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \left( {}^t R \vec{b}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \frac{-10\xi + 20\eta}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

となりますから、この座標で (1) は

$$5\eta^2 + \frac{-10\xi + 20\eta}{\sqrt{5}} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \eta^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}\eta - \frac{2}{\sqrt{5}}\xi = 0 \quad (3)$$

となります。さらにこれを

$$\xi = \frac{\sqrt{5}}{2} \left( \eta + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

と変形します。最後に

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \eta + \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換によって (1) は

$$X = \frac{\sqrt{5}}{2} Y^2$$

と表されます。

**別解** (1) は

$$(x - 2y)^2 - 8x + 6y = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left( \frac{x - 2y}{\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y = 0$$

と変形できます。回転座標変換を

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x+y}{\sqrt{5}} \\ \frac{-x+2y}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と定めると (1) は

$$\eta^2 - \frac{8}{5} \cdot \frac{2\xi - \eta}{\sqrt{5}} + \frac{6}{5} \cdot \frac{\xi + 2\eta}{\sqrt{5}} = \eta^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\xi + \frac{4}{\sqrt{5}}\eta = 0$$

と表されます。

(3)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}$  とすれば

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + 32 = 0 \quad (1)$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} & \left( A \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + 32 \\ &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \\ & \quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \end{aligned}$$

と展開できます. ここで

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( 2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \end{aligned}$$

となります. ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 &= \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + 32 = -6 \end{aligned}$$

から

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - 6 = 0$$

となります.

次に  $A$  を回転行列で対角化します.  $A$  の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = -2, 3$  であることが分かります. さらに固有ベクトルを求めます.

$\lambda = -2$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

$\lambda = 3$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (-2\vec{r}_1 \ 3\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と  $A$  は回転行列  $R$  によって対角化されます. さらに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) &= \left( AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( {}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= -2\xi^2 + 3\eta^2 \end{aligned}$$

となりますから, この座標で (1) は

$$-2\xi^2 + 3\eta^2 - 6 = 0$$

と表され, 双曲線であることが分かります.

(4)  $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  とすれば

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (1)$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned}
 & \left( A \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) \\
 &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\
 &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \\
 & \quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha})
 \end{aligned}$$

と展開できます。ここで

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned}
 & \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\
 &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( 2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) = 0
 \end{aligned}$$

となります。ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} A^{-1} \vec{b} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}
 (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) &= -\frac{1}{2} (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\
 &= -\frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

から (1) は

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - \frac{1}{3} = 0$$

となります。

さらに  $A$ , 正確には 2 次形式  $\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$  を回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いた座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

で変換します. すなわち

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) &= \left( AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( {}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 \end{aligned}$$

となります. ここで

$${}^tRAR = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることを用いました. 以上から与えられた 2 次曲線は楕円

$$\frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{3} = 0$$

であることが分かりました.

(5)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  とすれば

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) - 5 = 0 \quad (1)$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると (1) は

$$\begin{aligned}
 & \left( A \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) - 5 \\
 &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) - 5 \\
 &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \\
 &\quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) - 5 = 0
 \end{aligned}$$

と展開できます。ここで

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned}
 & \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\
 &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( 2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha})
 \end{aligned}$$

となります。ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} A^{-1} \vec{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}
 (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) &= \frac{1}{2} (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{13}{3}
 \end{aligned}$$

から (1) は

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \frac{13}{3} - 5 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - \frac{2}{3} = 0$$

となります。

次に  $A$  を回転行列で対角化します.  $A$  の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = -1, 3$  であることが分かります. さらに固有ベクトルを求めます.

$\lambda = -1$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

$\lambda = 3$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (-\vec{r}_1 \ 3\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と  $A$  は回転行列  $R$  によって対角化されます. さらに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) &= \left( AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( {}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= -\xi^2 + 3\eta^2 \end{aligned}$$

となりますから、この座標で (1) は

$$-\xi^2 + 3\eta^2 - \frac{2}{3} = 0$$

と表され、双曲線であることが分かります。

(6)

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 5y - 2 = 0 \quad (1)$$

について問題 (2) の別解と同様に考えてみます。すなわち

$$\left( \frac{x-2y}{\sqrt{5}} \right)^2 - y - \frac{2}{5} = 0 \quad (2)$$

と変形すると、回転座標変換

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

によって

$$\xi^2 - \frac{-2\xi + \eta}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5} = 0$$

となります。これを

$$\left( \xi + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{\eta}{\sqrt{5}} - \frac{3}{5} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \eta = \sqrt{5} \left( \xi + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{3}{\sqrt{5}}$$

とさらに変形します。ここで

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \eta + \frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換を考えると

$$Y = \sqrt{5}X^2$$

となります。