第 7 章

回転行列・直交行列・2 次形式—2 次元の場合

7.1 回転行列

2 次正方行列

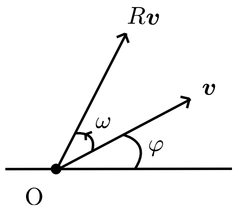
$$R = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

を考えましょう．この行列は幾何的に大事な性質を持っています．そのことを理解するために 2 次元ベクトル $\vec{v}(\neq \vec{0}) \in \mathbf{R}^2$ を $r > 0$ を用いて

$$\vec{v} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

と表示して R を掛けます．

$$\begin{aligned} R\vec{v} &= \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \cdot r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} \cos\omega\cos\varphi - \sin\omega\sin\varphi \\ \sin\omega\cos\varphi + \cos\omega\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} \cos(\omega+\varphi) \\ \sin(\omega+\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



から $R\vec{v}$ は $\vec{v}$ を角度 ω 回転したベクトルとなることが分かります．このことから R を**回転行列**と呼びます．

回転行列の性質をいくつか紹介しましょう．

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} R_\theta R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'} \end{aligned}$$

から

$$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} \tag{7.1}$$

を得ます（この式は回転行列の幾何的な意味を考えると自然なものです）．**回転行列の積は回転行列になる**ことに注意しましょう．

さらに (7.1) から

$$R_{-\theta} R_\theta = R_\theta R_{-\theta} = R_0 = I_2$$

が従いますが、これから**回転行列は正則で逆行列が回転行列になる**ことが分かります．

$$\begin{aligned} (R_\theta)^{-1} = R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= {}^t\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = {}^tR \end{aligned}$$

から

$${}^tRR = R\,{}^tR = I_2 \tag{7.2}$$

が従います．

回転行列 R と任意のベクトル $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \tag{7.3}$$

が成立します．これは $\vec{v}$ と $\vec{w}$ のなす角度を ϕ とするとき，内積が

$$(\vec{v}, \vec{w}) = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cos\phi$$

と表されることから分かります．実際，回転してもベクトルの大きさと角度は変わりません．この (7.3) を

$$(R\vec{R}\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{R}\vec{v}, {}^tRR\vec{w}) = (\vec{R}\vec{v}, I_2\vec{w}) = (\vec{R}\vec{v}, \vec{w})$$

と (7.2) を用いて示すこともできます．ここで 49 ページの (2.21) を用いました．すなわち 2 次正方行列 A に対しては

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w}) \qquad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2) \tag{7.4}$$

が成立することを用いています．

演習 7.1. 次の計算をしましょう．
(1) $R_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$　　**(2)** $R_{-\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

7.2　直交行列

回転行列 R は任意の $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \tag{7.5}$$

を満たします．逆に，2 次正方行列 P が任意の $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(P\vec{x}, P\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \tag{7.6}$$

を満たしているとします．このとき P はどのような行列になるかについて考えていきます．(7.4) を用いると

$$(P\vec{x}, P\vec{y}) = ({}^tPP\vec{x}, \vec{y})$$

が成立しますから (7.6) は

$$({}^tPP\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$$

と必要十分です．さらに式を整理して

$$(({}^tPP - I_2)\vec{x}, \vec{y}) = 0 \tag{7.7}$$

と必要十分です．ここで $\vec{a} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(\vec{a}, \vec{y}) = 0 \quad (\vec{y} \in \mathbf{R}^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \tag{7.8}$$

が成立しますから，任意の $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して (7.7) が成立することは

$$({}^tPP - I_2)\vec{x} = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^2)$$

が成立することと同値であることが分ります．さらに，2 次正方行列 $C \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$C\vec{x} = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^2) \quad \Longleftrightarrow \quad C = O_2 \tag{7.9}$$

が成立しますから，結局，任意の $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して (7.6) が成立することは

$${}^tPP = I_2 \tag{7.10}$$

と必要十分であることが証明できました．

さらに，(7.10) が成立するとき，

$$\det({}^tPP) = \det({}^tP)\det(P) = \det(P)^2 = \det(I_2) = 1$$

より

$$\det(P) = \pm 1 \tag{7.11}$$

が従います．これから P は正則であることが分り，

$${}^tP = P^{-1}$$

であることも分ります．そして

$$P^tP = PP^{-1} = I_2$$

が分ります．その結果

$${}^tPP = I_2 \Leftrightarrow {}^tPP = P^tP = I_2$$

が示されました．

定理 7.1. *2* 次正方行列 $P \in M_2(\mathbf{R})$ に対して次の条件 *(i), (ii), (iii), (vi)* は必要十分です（この条件を満たす *2* 次正方行列を直交行列といいます）．

(i) $(P\vec{x}, P\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \quad (\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2)$

(ii) $||P\vec{x}|| = ||\vec{x}|| \quad (\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^2)$

(iii) ${}^tPP = P^tP = I_2$

(iv) $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ と列ベクトル表示をすると

$$||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

が成立する．

(証明) (i)⇒(ii) は (i) において $\vec{x}=\vec{y}$ とすれば従います．
(ii)⇒(i) は，一般に $\vec{x},\ \vec{y}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{x}+\vec{y}||^2-||\vec{x}-\vec{y}||^2=4(\vec{x},\vec{y})$$

が成立することを用いれば証明できます．
(i) ⇔(iii) は上で証明しました．
　最後に (iii) ⇔(iv) を証明しましょう．$P=(\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ とすると

$${}^tPP=\begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \end{pmatrix}(\vec{p}_1\ \vec{p}_2)=\begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1\vec{p}_1 & {}^t\vec{p}_1\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_2\vec{p}_1 & {}^t\vec{p}_2\vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} {}^tPP=I_2 &\Leftrightarrow {}^t\vec{p}_1\vec{p}_1={}^t\vec{p}_2\vec{p}_2=1,\ {}^t\vec{p}_1\vec{p}_2=0 \\ &\Leftrightarrow ||\vec{p}_1||=||\vec{p}_2||=1,\ (\vec{p}_1,\vec{p}_2)=0 \end{aligned}$$

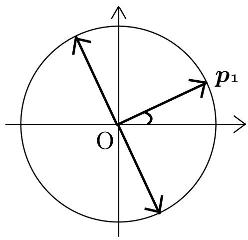
が分かります．これから (iii)⇔(iv) が従います．**(証明おわり)**

演習 7.2. (7.8) と (7.9) を証明してください．

　次に上の条件 (iv) を用いて，直交行列はどのような行列か考えてみましょう．$||\vec{p}_1||=1$ ですから，

$$\vec{p}_1=\begin{pmatrix} \cos\omega \\ \sin\omega \end{pmatrix}$$

と表示できます．すると，$||\vec{p}_2||=1$，$(\vec{p}_1,\vec{p}_2)=0$ ですから，$\vec{p}_2$ は $\vec{p}_1$ を $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転したものになります．このことから



$$\vec{p}_2=\begin{pmatrix} \cos(\omega\pm\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\omega\pm\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} -\sin\omega \\ \cos\omega \end{pmatrix}$$

と表示できます．以上で

$$P=\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}\quad \text{または}\quad \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\theta & -\cos\omega \end{pmatrix}$$

と表示できることが分かりました．このそれぞれの行列の幾何学的な意味を考えましょう．

(i) 最初に

$$P = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

の場合を考えましょう．これは 7.1 節で考えた回転行列に他なりません．

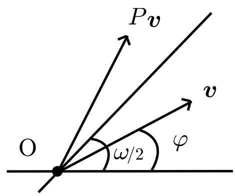
(ii)　次に

$$P = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}$$

の場合を考えましょう．そのための $r > 0$ として

$$\vec{v} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

に対して P を掛けます．



$$\begin{aligned} P\vec{v} &= \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix} \cdot r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi \\ \sin\omega\cos\varphi - \cos\omega\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \cos(\omega - \varphi) \\ \sin(\omega - \varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このとき $P\vec{v}$ は方向ベクトルが

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

である原点を通る直線に関して $\vec{v}$ を**折り返し**たものであることが分ります．

注意 7.1. P が直交行列とします．*182* ページの (7.11) で示しましたが

$$\det(P) = \pm 1$$

が成立します．*(i)*P が回転の場合

$$\det(P) = 1$$

となります．他方 *(ii)* P が折り返しの場合

$$\det(P) = -1$$

となります．

演習 7.3. P_1, P_2 が直交行列とします．P_1P_2 が直交行列であることを示しましょう．${}^tP_1 = P_1^{-1}$ も直交行列であることを示しましょう．

演習 7.4. $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ に対して Q^2 を考えて Q^{-1} を求めましょう．

演習 7.5. $\vec{p} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ を考えます．$\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ の $\vec{p}$ 方向への直交射影を

$$\vec{w} = (\vec{p}, \vec{v}) \cdot \vec{p}$$

と定めます．このとき

$$\vec{q} = \vec{v} - 2(\vec{v} - \vec{w}) = 2\vec{w} - \vec{v}$$

に対して

$$\vec{q} = Q\vec{v}$$

と $Q \in M_2(\mathbf{R})$ を用いて表されることを示しましょう．そして Q を求めましょう．

7.3　2 次形式

7.3.1　2 次形式

まず具体的な問題から考えていきます．

行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

は，条件 ${}^tA = A$ を満たすので**対称行列**と呼ばれます．この場合，必ず対角化可能で，しかも直交行列 P を用いて $P^{-1}AP = {}^tPAP$ が対角行列となるように対角化できます．

このことを示すために，まず A の固有値を求めます．そのために固有方程式

$$\begin{aligned} |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 2) - (-2) \times (-2) \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0 \end{aligned}$$

を解くと，$\lambda = 1, 6$ が固有値であることが分ります．それぞれの固有ベクトルを求めましょう．

<u>$\lambda = 1$ のとき</u>

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; 2x + y = 0$$

ですから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります．

$\lambda = 6$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \ \Leftrightarrow \ x - 2y = 0$$

ですから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となります．

　ここで

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$$

と定めると

$$||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

が成立しますから行列 P は直交行列です（この場合は回転行列になっています）．この P を用いると

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (1 \cdot \vec{p}_1 \ 6 \cdot \vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$^{t}PAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

と対角化できます．

　なぜこのように，直交行列によって対角化するかについて説明します．それは，A が定める 2 次形式 $5x^2 + 4xy + 2y^2$ を考えるからです．すなわち

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

について考えます．演習 7.3（184）にあるように ${}^tP$ も直交行列ですから $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と定めると

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left({}^tPAP{}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \xi^2 + 6\eta^2\end{aligned}$$

が導かれます．

　このことを用いて，制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下で 2 次形式

$$5x^2 + 4xy + 2y^2$$

を最大化・最小化することを考えます．制約条件の $x^2 + y^2 = 1$ は

$$\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^2 = 1$$

とノルムを使って書くことができます．${}^tP$ が直交行列であることを用いると

$$\left\|\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|{}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^2 = 1$$

から，制約条件は (ξ, η) 座標で

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

と表されることが分かります．この制約条件を用いて $\xi^2 + 6\eta^2$ から ξ を消去すると

$$\xi^2 + 6\eta^2 = (1 - \eta^2) + 6\eta^2 = 1 + 5\eta^2 \geq 1$$

と制約条件の下で値が 1 以上となります．さらに，この不等式は $\eta = 0$，従って $\xi = \pm 1$ で等号が成立します．よって最小値は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\vec{p}_1$$

のときに 1 を取ります．次に η を消去します．すると

$$\xi^2 + 6\eta^2 = \xi^2 + 6(1 - \xi^2) = 6 - 5\eta^2 \ \leqq 6$$

と制約条件の下で値が 6 以下となります．さらに，この不等式は $\xi = 0$，従って $\eta = \pm 1$ で等号が成立します．よって最大値は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_2$$

のときに 6 を取ります．

演習 7.6. **(1)** 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を直交行列で対角化しましょう．
(2) 制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下で関数

$$z = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

の最小値・最大値を求めましょう．

演習 7.7. 以下の対称な $A \in M_2(\mathbf{R})$ を回転行列で対角化して，A が定める *2* 次形式を回転座標変換で簡単にしましょう．

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$　　**(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

以上の例を下に，一般的な 2 次の対称行列の対角化と 2 次形式について述べます．

対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

の固有方程式

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - b) - c^2 = \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab - c^2) = 0$$

の判別式は

$$D = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) = (a-b)^2 + c^2 \geqq 0$$

ですから，判別式は非負となります．従って，対称行列 A の固有値 α, β は実数となります．

$$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

さらに固有方程式が重根を持つ場合，すなわち $\alpha = \beta$ の場合を考えましょう．

$$D = 0 \Leftrightarrow a = b, \quad c = 0$$

ですから，

$$A = aI_2$$

を満たす a がなければ，言い換えれば A が単位行列の定数倍でなければ A の固有方程式は 2 相異実根

$$\alpha \neq \beta$$

を持つことが従います．

定理 7.2. **(i)** 対称行列 A の固有値 α, β は実数となります．
(ii) **(i)** において $\alpha = \beta$ となることと $A = aI_2$ となることとは必要十分です．

以下，$\alpha \neq \beta$ の場合だけを考えます．まず α と β の固有ベクトル $\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$ を取ります．このとき

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1, \quad A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2 \tag{7.12}$$

が成立します．このとき

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \tag{7.13}$$

が成立します．実際

$$(A\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{v}_1, A\vec{v}_2)$$

が ${}^tA = A$ から従いますが，さらに (7.12) から

$$(A\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad (\vec{v}_1, A\vec{v}_2) = \beta(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

が成立します．以上から

$$\alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \beta(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

が証明されました．$\alpha \neq \beta$ から (7.13) が従います．ここで $\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$ の方向の単位ベクトルを定めます．すなわち

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{||\vec{v}_1||}\vec{v}_1, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{||\vec{v}_2||}\vec{v}_2$$

とします．すると

$$||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

が成立しますから

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$$

は直交行列となります．さらに

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (\alpha\vec{p}_1 \ \beta\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

から

$$A = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}{}^tP$$

と直交行列で対角化することができます．ここで $\det(P) = 1$ のときは P は回転行列になります．また $\det(P) = -1$ のときは $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ の列ベクトルを用いて $R = (\vec{p}_1 \ -\vec{p}_2)$ と定めると R は $\det(R) = 1$ となりますから，回転行列であることが分かります．さらに

$$AR = R\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となりますから，対称行列 A は回転行列で対角化できることが分かります．

定理 7.3. 対称行列 A は直交行列（回転行列）P を用いて

$$A = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}{}^tP$$

と対角化できます．

次に A が定める 2 次形式

$$(A\vec{v}, \vec{v})$$

を考えます．これは

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と定めると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2cxy + by^2$$

と表示されます．ここで A の直交行列による対角化

$$A = PA_0{}^tP \quad \text{ただし} \quad A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を用います．すなわち

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = (PA_0{}^tP\vec{v}, \vec{v}) = ({}^tPPA_0{}^tP\vec{v}, {}^tP\vec{v}) = (A_0{}^tP\vec{v}, {}^tP\vec{v})$$

において $\vec{p} = {}^t P \vec{v}$ を

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と表示すると

$$\begin{aligned}(A\vec{v}, \vec{v}) &= (A_0 {}^t P\vec{v}, {}^t P\vec{v}) = (A_0\vec{p}, \vec{p}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2\end{aligned}$$

が従います．ここで次の問題を考えます．

問題

$$x^2 + y^2 = 1$$

の下で

$$z = ax^2 + 2cxy + by^2$$

の最大値，最小値を求める．

制約条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

は

$$||\vec{v}||^2 = 1$$

と同値ですから

$$||\vec{p}||^2 = ||{}^t P\vec{v}||^2 = ||\vec{v}||^2 = 1$$

が従います．これは

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

と必要十分です．以下

$$\alpha < \beta$$

として考えます．$\xi^2 = 1 - \eta^2$ を用いて ξ を消去すると

$$z = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 = \alpha(1-\eta^2) + \beta\eta^2 = \alpha + (\beta - \alpha)\eta^2 \geqq \alpha$$

を得ます．この不等式において $\eta = 0$ 従って $\xi = \pm 1$ のとき等号が成立します．従って

$$\vec{v} = P\vec{p} = P \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\vec{p}_1$$

のときに最小値 α を取ることが示されました．

同様に，$\eta^2 = 1 - \xi^2$ を用いて η を消去すると

$$z = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 = \alpha\xi^2 + \beta(1 - \xi^2) = \beta - (\beta - \alpha)\xi^2 \leqq \beta$$

を得ます．この不等式において $\xi = 0$ 従って $\eta = \pm 1$ のとき等号が成立します．従って

$$\vec{v} = P\vec{p} = P\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm\vec{p_2}$$

のときに最大値 β を取ることが示されました．

7.3.2　主成分分析

統計量をベクトルの内積やノルムで表現した**??**節の状況で考えます．対になっている変量 (x, y) のデータ

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3), \cdots, (x_N, y_N)$$

x_1	y_1
x_2	y_2
·	·
·	·
·	·
x_n	y_n

が与えられているとします． このとき，新たな変量

$$z = sx + ty$$

を定数 s と t を用いて定義すると，z の分散は**??**ページの (**??**) で示しましたが

$$\begin{aligned} V(z) &= s^2V(x) + 2stCov(x, y) + t^2V(y) \\ &= \left(C\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

と**分散共分散行列**，または単純に**分散行列**

$$C = \begin{pmatrix} V(x) & Cov(x, y) \\ Cov(x, y) & V(y) \end{pmatrix}$$

を用いて表示することができます．C は対称行列ですから，ある直交行列 P を用いて

$${}^tPCP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角化できます．これを用いると $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ を用いて $V(z)$ は

$$V(z) = \left({}^tPCP{}^tP \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, {}^tP \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

と標準形に変換できます．以下 $\alpha < \beta$ と仮定して[*1]，制約条件 $s^2 + t^2 = 1$ の下で $V(z)$ を最大化・最小化すると，前節の結果から

(i) $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \pm\vec{p_1} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ において $V(z)$ は最小値 β を取り，**(ii)** $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \pm\vec{p_2} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ において $V(z)$ は最大値 α を取ります．

統計学では，最大の分散を取る

$$z = p_{12}x + p_{22}y$$

のことを，**主成分**と呼びます．データの 2 次元散布図を描いたときに，バラツキが最大になる方向を知りたいときに主成分分析を行うことにも注意しましょう．

7.3.3　2 次形式の正定値・負定値

対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

が定める 2 次形式

$$z = f(x, y) = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

は，回転行列 P を用いた回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

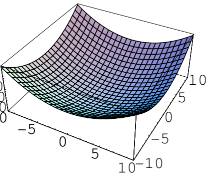
を用いて

$$z = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

[*1] $\alpha = \beta$ の場合，C が対角行列となります．これは，x と y の相関係数が 0 の場合ですから，考える重要性がありません．

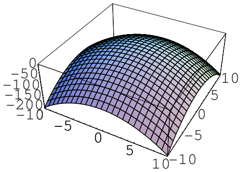
と A の固有値 α と β で表すことができます．$z = f(x, y)$ のグラフの概形は，α と β の符号で次のようになります（ここでは，$\alpha\beta \neq 0$ の場合だけを示します）．

(i)



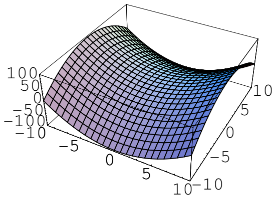
$\alpha,\ \beta > 0$

(ii)



$\alpha,\ \beta < 0$

(iii)



$\alpha\beta < 0$

上で説明した 3 つの場合に分けて考えていきます．そのために，A の固有多項式の計算

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + \det(A) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

から

$$a + b = \alpha + \beta, \quad \det(A) = ab - c^2 = \alpha\beta \tag{7.14}$$

に注意しましょう．このことから，$\det(A) \neq 0$ とすると，上の (i), (ii), (iii) のいずれか一つの場合に当てはまることが分かります（このとき，考える 2 次形式は**非退化**であるといいます）．

(i) $\alpha,\ \beta > 0$ の場合は，

$$ab = c^2 + \alpha\beta > 0,\ a + b = \alpha + \beta > 0$$

から $a, b > 0$ が成立します[*2]．また，$\det(A) = \alpha\beta > 0$ も成立します．また，このとき

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

が成立します．

(ii) $\alpha,\ \beta < 0$ の場合は，

$$ab = c^2 + \alpha\beta > 0,\ a + b = \alpha + \beta < 0$$

から $a, b < 0$ が成立します．また，$\det(A) = \alpha\beta > 0$ も成立します．また，このとき

$$(A\vec{v}, \vec{v}) < 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

[*2] $a, b \in \mathbf{R}$ に対して $a, b > 0 \Leftrightarrow a + b > 0, ab > 0$ であることを用いています．

が成立します．

(iii) $\alpha\beta < 0$ の場合は，$\det(A) = \alpha\beta < 0$ が成立します．簡単のために $\alpha > 0$, $\beta < 0$ とすると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ で与えられる固有ベクトル $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ で与えられる 2 つの方向に関して顕著なことが分かります．すなわち

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1$$

であるとき

$$z = (A\vec{v}, \vec{v}) = \alpha\xi^2$$

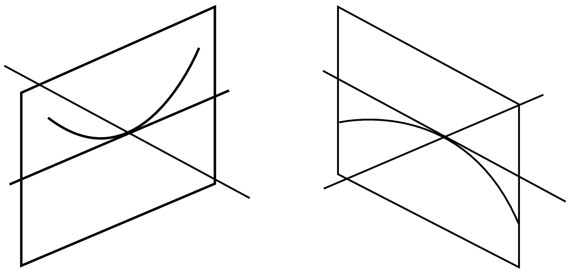
となり，他方

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \eta \vec{p}_2$$

であるとき

$$z = (A\vec{v}, \vec{v}) = \beta\eta^2$$

が成立します．この $\eta = 0$ の断面と $\xi = 0$ を下図に与えましょう．



以上の考察から，次を示すことができます．

定理 7.4. **(I)** 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

に対して以下の条件は同値です（このとき A が定める 2 次形式は正定値であるといいます）.
(i) A が定める *2* 次形式に対して

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

が成立します.
(ii) A の固有値 α, β が $\alpha > 0$, $\beta > 0$ を満たします.
(iii) A は $\det(A) > 0$ かつ $a > 0$ を満たします.
(II) 上の対称行列 A に関して，以下の条件は同値です（このとき A が定める 2 次形式は負定値であるといいます）.
(i) A が定める *2* 次形式に対して

$$(A\vec{v}, \vec{v}) < 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

が成立します.
(ii) A の固有値 α, β が $\alpha < 0$, $\beta < 0$ を満たします.
(iii) A は $\det(A) > 0$ かつ $a < 0$ を満たします.

定理 7.4 の **(I)** の場合を示しましょう.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) これは上で示されています.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) (7.14) で示した

$$a + b = \alpha + \beta, \quad \det(A) = ab - c^2 = \alpha\beta \tag{7.15}$$

を用います.

$$ab \geq ab - c^2 = \det(A) > 0$$

から $ab > 0$ が分かります．これと $a > 0$ から $b > 0$ が分かります.

$$\alpha + \beta = a + b > 0$$

と

$$\alpha\beta = \det(A) > 0$$

から $\alpha, \beta > 0$ が従います.

(i) $\Rightarrow$ (ii)　${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ と直交行列 P で対角化します．そして ${}^tP\vec{v} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ とします．このとき

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

となります．ここで ${}^tP\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ すなわち $\vec{v} = \vec{p}_1 \neq \vec{0}$ とすると

$$0 < (A\vec{p}_1, \vec{p}_1) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha$$

から $\alpha > 0$ が従います．他方 ${}^tP\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ すなわち $\vec{v} = \vec{p}_2 \neq \vec{0}$ とすると

$$0 < (A\vec{p}_2, \vec{p}_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = \beta$$

から $\beta > 0$ が従います．
(ii) $\Rightarrow$ (i) 上で $\alpha, \beta > 0$ とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \geq 0$$

が分かります．この不等式の等号成立条件[*3]は

$$\alpha\xi^2 = \beta\eta^2 = 0$$

すなわち $\xi = \eta = 0$ ですが，これは $\vec{v} \neq \vec{0}$ と必要十分条件です．よって

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

が示されました．
(iii) $\Rightarrow$ (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とします．このとき

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{v}) &= ax^2 + 2cxy + by^2 \\ &= a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

が $a > 0, ab - c^2 > 0$ から分かります．最後の不等式の等号成立条件は

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0$$

[*3] $a, b \in \mathbf{R}$ が $a, b \geq 0$ を満たすとき $a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ であることを用いています．

で、これは $x=y=0$ と必要十分です．従って $\vec{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ならば

$$(A\vec{v},\vec{v})>0$$

であることが分かります．

(i) $\Rightarrow$ (iii) $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$\left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)=a>0$$

が従います．さらに，上で $\vec{v}={}^t(-\frac{c}{a}\ 1)\neq\vec{0}$ とすると

$$(A\vec{v},\vec{v})=\frac{ab-c^2}{a}>0$$

から $ab-c^2>0$ も分かります．

演習 7.8. 対称行列 A が定める 2 次形式が正定値であるとします．このとき A が正則であることを確認して，A^{-1} が対称で A^{-1} が定める 2 次形式も正定値であることを示しましょう．

退化している場合

以上は，A が定める 2 次形式が非退化の場合でした．$\det(A)=\alpha\beta=0$ の場合を考えます．この場合，少なくとも 1 個の固有値が 0 となります (両方の固有値が 0 の場合は，$A=O_2$ とゼロ行列になってしまいます)．ここでは $\alpha=0$ かつ $\beta\neq 0$ の場合を考えます．この場合は

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}=\xi\vec{p}_1$$

であるとき

$$z=(A\vec{v},\vec{v})=\alpha\xi^2=0$$

となります．原点を通り $\vec{p}_1$ の方向の直線上，2 次形式が常にゼロになります．$\beta>0$ の場合は

$$z=(A\vec{v},\vec{v})=\beta\eta^2\geqq 0$$

となり，他方 $\beta<0$ の場合は

$$z=(A\vec{v},\vec{v})=\beta\eta^2\leqq 0$$

となります．

7.3.4　非負定値・非正定値

対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ について考えます.

$$(A\vec{v}, \vec{v}) \geq 0 \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^2)$$

が成立するとき，A が定める 2 次形式は**非負定値**であるといいます．他方、

$$(A\vec{v}, \vec{v}) \leq 0 \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^2)$$

が成立するとき，A が定める 2 次形式は**非正定値**であるといいます．定理 7.4 と同様にこの性質は A の成分や行列式、または A の固有値で特徴付けができます.

定理 7.5. **(I)** 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ に対して次の条件はすべて必要十分です.
(i) A が定める 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$ は非負定値です.
(ii) A の固有値 α, β は $\alpha, \beta \geq 0$ を満たします.
(iii) $a, b \geq 0,\ \det(A) \geq 0$
(II) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ に対して次の条件はすべて必要十分です.
(i) A が定める 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$ は非正定値です.
(ii) A の固有値 α, β は $\alpha, \beta \leq 0$ を満たします.
(iii) $a, b \leq 0,\ \det(A) \geq 0$

この定理 7.5 の証明は定理 7.4 とほぼ同様です．より具体的には (i)$\Leftrightarrow$ (ii) と (ii)$\Leftrightarrow$ (iii) は 2 つの定理の証明でほぼ同じです.

Gram 行列

$B = (\vec{p}\ \vec{q})$ を $n \times 2$ 行列とします．このとき列ベクトルは

$$\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{R}^n$$

であることに注意しましょう．ここで

$$A = {}^t AA = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p} \\ {}^t\vec{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p} & \vec{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||\vec{p}||^2 & (\vec{p}, \vec{q}) \\ (\vec{q}, \vec{p}) & ||\vec{q}||^2 \end{pmatrix}$$

は 2 次の対称行列となります．この A を B が定める *Gram* 行列と呼びます．

$$(A\vec{v},\vec{v})=({}^tAA\vec{v},\vec{v})=(A\vec{v},A\vec{v})=\|A\vec{v}\|^2\geq 0$$

から行列 A が定める 2 次形式は非負定値であることが分かります．より詳しくは以下の定理が成立します．

> **定理 7.6.** $B=(\vec{p}\ \vec{q})$ を $n\times 2$ 行列とします．
> **(1)** $A={}^tBB$ が定める 2 次形式は非負定値です．
> **(2)** $A={}^tBB$ が定める 2 次形式が正定値である必要十分条件は $\vec{p}$ と $\vec{q}$ が平行でないことです．このとき A は正則になります．

（証明） **(1)** は証明しました．定理 7.5 から A の固有値 α,β は $\alpha,\beta\geq 0$ を満たすことに注意しましょう．
(2) 定理 7.4 を用いると，A が定める 2 次形式が正定値である必要十分条件は $\alpha,\beta>0$ であることが分かります．

$$\det(A)=\alpha\beta\geq 0$$

が成立していますから、この条件は $\det(A)\neq 0$ すなわち A が正則であることと必要十分です．155 ページの (5.19) を用いるとこの条件は

$$\ker(A)=\{\vec{0}\}$$

すなわち

$$c_1\vec{p}+c_2\vec{q}=\vec{0}\Rightarrow c_1=c_2=0$$

であることと必要十分です．

7.4　2 次曲線

平面の座標を (x,y) として，(x,y) の 2 次式

$$ax^2+2cxy+by^2+dx+ey+f=0 \tag{7.16}$$

を満たす点全体のことを，この 2 次式 (7.16) が定める 2 次曲線といいます．この 2 次曲線を平行移動座標変換と回転座標変換で簡単な形のものに変換することを考えます．2 次の項がない場合は考える必要はないですから

$$A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\neq O_2$$

を仮定します．また

$$\mathbf{b} = (d\ e), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と定めます．このとき (7.16) は

$$(A\vec{v}, \vec{v}) + \mathbf{b}\vec{v} + f = 0$$

と表現できます．

まず 1 次の項を平行移動座標変換で消すことができるか考えます．すなわち

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

として

$$(A\vec{v}, \vec{v}) + \mathbf{b}\vec{v} + f = (A(\vec{v} - \vec{v}_0), (\vec{v} - \vec{v}_0)) + f' \tag{7.17}$$

が恒等的に成立するために $\vec{v}_0$ と f' を定めることができるかを考えます．(7.17) の右辺を展開すると

$$\begin{aligned} (A(\vec{v} - \vec{v}_0), (\vec{v} - \vec{v}_0)) + f' &= (A\vec{v}, \vec{v}) - (A\vec{v}, \vec{v}_0) - (A\vec{v}_0, \vec{v}) + (A\vec{v}_0, \vec{v}_0) + f' \\ &= (A\vec{v}, \vec{v}) - 2(A\vec{v}_0, \vec{v}) + (A\vec{v}_0, \vec{v}_0) + f' \end{aligned}$$

となりますから (7.17) は

$$(2A\vec{v}_0 + {}^t\mathbf{b}, \vec{v}) + f - f' - (A\vec{v}_0, \vec{v}_0) = 0$$

と必要十分です．これがすべての $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ に対して成立する条件は

$$2A\vec{v}_0 + {}^t\mathbf{b} = \vec{0}, \qquad f' = f - (A\vec{v}_0, \vec{v}_0)$$

です．

非退化の場合

(I) まず $\det(A) \neq 0$ の場合を考えます．このとき

$$\vec{v}_0 = -\frac{1}{2}A^{-1\,t}\mathbf{b}$$

と上の条件を満たす $\vec{v}_0$ を定めることができます．そこで

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

と座標を平行移動すると，与えられた 2 次曲線は

$$aX^2 + 2cXY + bY^2 + f' = 0$$

となります．

　さらに 2 次の部分を回転座標変換によって，単純なものにします．A は対称行列ですから回転行列 $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$ によって

$$A = R\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}{}^tR$$

と対角化できます．$\det(A) \neq 0$ の場合を考えていますから，

$$\det(A) = \alpha\beta$$

を考えると

$$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$$

であることが分かります．ここで回転の行列 R によって

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^tR\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

とすれば，

$$aX^2 + 2cXY + bY^2 + f' = \alpha_1\xi^2 + \beta_2\eta^2 + f'$$

となります．以上をまとめると以下を得ます．

2 次曲線

$$ax^2 + 2cxy + by^2 + dx + ey + f = 0 \tag{7.18}$$

が与えられているとき $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$,　$\mathbf{b} = (d\ e)$ と定めます．

$$\det(A) = ab - c^2 \neq 0$$

を仮定します．このとき

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\,{}^t\mathbf{b}$$

と

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を満たす回転行列 R によって、平行移動座標変換

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

と回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^tR \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

を合成して得られる座標 (ξ, η) を用いると，2 次曲線 (7.18) は

$$\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + f' = 0$$

と表せます．ここで α, β は A の固有値であり，

$$f' = f - ax_0^2 - 2cx_0y_0 - by_0^2$$

です．

ここでさらに場合を分けます．

(a) $\alpha\beta > 0$ のとき

(a-i) α と $-f'$ が同符号のとき

2 次曲線 (7.18) は楕円になります．

(a-ii) $f' = 0$ のとき

2 次曲線 (7.18) は 1 点 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ すなわち $(x, y) = (x_0, y_0)$ になります.

(a-iii) α と $-f'$ が異符号のとき

2 次曲線は空集合になります.

(b) $\alpha\beta < 0$ のとき

(b-i) $f' \neq 0$ のとき

2 次曲線 (7.18) は双曲線になります.

(b-ii) $f = 0$ のとき

2 次曲線 (7.18) は交わる 2 直線となります.

例 **7.1.** 2 次曲線

$$x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y = 0 \tag{7.19}$$

について考えます.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (-2\ 4), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると (7.19) は

$$(A\vec{v}, \vec{v}) + \mathbf{b}\vec{v} = 0 \tag{7.20}$$

と表されます.

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1\,t}\mathbf{b} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

と

$$f' = f - (A\vec{v}_0, \vec{v}_0) = -\frac{28}{3}$$

から

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

と平行座標変換をすると (7.19) は

$$\left(A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) - \frac{28}{3} = 0$$

となります．さらに A を回転行列 $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

と対角化します．そして

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換をすると (7.19) は

$$\frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 - \frac{28}{3} = 0$$

と表されます．

退化している場合

(II) 次に $\det(A) = ab - c^2 = 0$ の場合を考えましょう．この場合，非退化の場合のように 1 次の項を消すことができません．それでも対称行列の A はある回転行列 R を用いて

$$A = R \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} {}^tR$$

と対角化できます．$\det(A) = 0$ を仮定していましたから，

$$\det(A) = \alpha\beta$$

を用いると

$$\alpha = 0 \text{ または } \beta = 0$$

が成立します．もし $\alpha = \beta = 0$ が成立すると

$$A = RO_2{}^tR = O_2$$

となりますから，仮定から α または β の一方が 0 で，他方が 0 でありません．ここで

$$\alpha \neq 0,\ \beta = 0$$

を仮定しましょう．このとき回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^tR \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = \epsilon_1\xi^2$$

と表示されます．このことから (ξ, η) 座標を用いると

$$\alpha\xi^2 + d'\xi + e'\eta + f = 0 \tag{7.21}$$

と表示されます．ここで場合を分けます．

(a) $e' = 0$ のとき (7.21) は

$$\alpha\xi^2 + d'\xi + f = 0$$

となりますが，この ξ に関する判別式

$$D = {d'}^2 - 4f\epsilon_1$$

に関してさらに場合分けが必要となります．

(a-i) $D > 0$ のとき，(7.21) は η 軸に平行な 2 直線となります．

(a-ii) $D = 0$ のとき，(7.21) は η 軸に平行な 1 直線となります．

(a-iii) $D < 0$ のとき，(7.21) は空集合となります．

(b) $e' \neq 0$ のとき (7.21) は

$$\eta = -\frac{\alpha}{e'}\xi^2 - \frac{d'}{e'} - \frac{f}{e'} \tag{7.22}$$

と，軸が η 軸に平行な放物線になります．

例 7.2. 2 次曲線

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x \tag{7.23}$$

を考えます. これは

$$(x+y)^2 - 8x \tag{7.24}$$

と変形します．ここで

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を用いると

$$\left(\sqrt{2}X\right)^2 - 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$$

すなわち

$$Y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(X + \sqrt{2})^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

と放物線であることが分かります．

演習 7.9. 次の 2 次曲線を座標の平行移動と回転座標変換を用いて簡単にしましょう。

(1) $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + (2\sqrt{3} - 4)x + (\sqrt{3} - 4)y + (4 - \sqrt{3}) = 0$

(2) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 6y = 0$

(3) $2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32 = 0$

(4) $x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$

(5) $x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$

(6) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5y - 2 = 0$