第 6 章

固有値問題入門–2 次元の場合

6.1　線型変換と座標変換

6.1.1　座標変換

1.7 節で説明した座標変換について $n = 2$ の場合に説明します．以下では 2 次元部分空間 V は $V = \mathbf{R}^2$ となります．また 1.7 節における V 中の平行でない 2 本のベクトルとして標準単位ベクトル

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を取ります。このとき $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ が定める座標は標準的な

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

となります．次に平行でない

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},\ \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

を取ります．このとき $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ であることから

$$\Delta := |\vec{p}\ \vec{q}| = p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0$$

が成立します．$\vec{p}$ と $\vec{q}$ を用いて座標変換するために

$$P = (\vec{p}\ \vec{q})$$

と定めて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と $\vec{p}$, $\vec{q}$ を用いる座標が定義できます.

6.1.2　線型変換

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

を考えます．この対応によって写像

$$T_A :\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

が定まりますが，これを A が定める線型変換と呼びます．この T_A を $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ 座標で表現することを考えます.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と対応しますから

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ 座標では $P^{-1}AP$ が定める線型変換 $T_{P^{-1}AP}$ となります.

変換 ここで出てくる線型変換の変換についてです．X を集合とするとき X から X への写像

$$f :\ X \longrightarrow X$$

のことを X 上の変換と呼びます．上で T_A を定義するときに用いた x' と y' ですが，x と y が定める同じ座標系を用いていることを示すためにダッシュ「$'$」を使っています.

6.2　行列の対角化

6.2.1　固有多項式

以下では $A \in M_2(\mathbf{R})$ が定める線型変換を座標変換を行って、簡単な形、特に対角行列が定める線型変換にすることを考えます．まず具体的な例として

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

について考えます．

平行でない 2 本のベクトル $\vec{p},\ \vec{q} \in \mathbf{R}^2$ を用いた正則行列 $P = (\vec{p}\ \vec{q})$ によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

とすることを考えます．このとき $AP = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が従いますが、P の列ベクトルを用いると

$$(A\vec{p}\ A\vec{q}) = (\alpha\vec{p}\ \beta\vec{q})$$

となります．各列を見ると

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p},\ A\vec{q} = \alpha\vec{q}$$

すなわち

$$(\alpha I_2 - A)\vec{p} = (\beta I_2 - A)\vec{q} = \vec{0}$$

であることが分かります．他方 $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ ですから $\vec{p} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{q} \neq \vec{0}$ が成立します．ここで次の定理 6.1 を用いると

$$\det(\alpha I_2 - A) = \det(\beta I_2 - A) = 0 \tag{6.1}$$

が従います．

定理 6.1. $B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して次の (6.2) と (6.3) は同値です．

$$B\vec{p} = \vec{0},\ \vec{p} \neq \vec{0} \text{を満たす } \vec{p} \in \mathbf{R}^2 \text{ が存在する．} \tag{6.2}$$

$$\det B = 0 \tag{6.3}$$

ここで

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &:= \det(\lambda I_2 - A)\\ &= \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -4 & \lambda-3\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-1)(\lambda-3)-(-2)(-3)\\ &= \lambda^2-4\lambda-5=(\lambda-5)(\lambda+1)\end{aligned}$$

を定義すると (6.1) から α と β は $\Phi_A(\lambda)$ の根であることが分かります．

ここで $\Phi_A(\lambda)$ を一般的に定義します．

定義 6.1. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_2 - A) &= \begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-a)(\lambda-d)-(-b)(-c)\\ &= \lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc\\ &= \lambda^2-(a+d)\lambda+\det(A)\end{aligned}$$

を A の固有多項式と呼びます．

さらに A に関する具体的な考察を行います．(6.1) から

$$\Phi_A(\alpha)=\Phi_A(\beta)=0$$

であることは分かりましたが，$\Phi_A(\lambda)$ の根 $\lambda=1,5$ との関係は分かりません．

実は，固有多項式は線型座標変換を行っても変わりません．すなわち，一般に $A\in M_2(\mathbf{R})$ と正則な $P\in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\Phi_A(\lambda)=\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) \tag{6.4}$$

が成立します．実際，

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_2 - P^{-1}AP) &= \det(P^{-1}\lambda I_2 P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I_2 - A)P)\\ &= \det(P^{-1})\det(\lambda I_2 - A)\det(P)\\ &= \det(\lambda I_2 - A)\end{aligned}$$

から導けます．ここで $\det(P^{-1})\det(P)=\det(P^{-1}P)=\det(I_2)=1$ であることを用いました．

公式 (6.4) を応用しましょう．$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ですから

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & 0 \\ 0 & \lambda - \beta \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

から

$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

が分かります．このことから

$$\alpha = 5,\ \beta = -1 \quad \text{または} \quad \alpha = -1,\ \beta = 5$$

であることが従います.

6.2.1 節を締めくくるために、公式 (6.4) を定理 6.2 にまとめます.

定理 6.2. 2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ と正則な $P \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) \tag{6.5}$$

が成立します.

6.2.2　固有値と固有ベクトル

以下では $\alpha = 5,\ \beta = -1$ の場合を考えます．まず

$$(5I_2 - A)\,\vec{p} = \vec{0}$$

を用いて $\vec{p}$ を求めます.

$$\begin{aligned}(5I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2x - y = 0\end{aligned}$$

から

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となります.

同様に

$$(-I_2 - A)\,\vec{q} = \vec{0}$$

を用いて $\vec{q}$ を求めましょう.

$$(-I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow x + y = 0$$

から

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となります.

ここで $\vec{p}$ と $\vec{q}$ においてそれぞれ $x = 1$ の場合を考えます[*1]. すなわち

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ P = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\det(P) = -3 \neq 0$$

から $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ 従って P が正則であることが分かります[*2]. さらに

$$A\vec{p} = 5\vec{p}, \ A\vec{q} = -\vec{q}$$

から

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}\ A\vec{q}) = (5\vec{p}\ \ -\vec{q}) \\ &= (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が従います. そして P が正則ですから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となります.

以上で $P = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ が定める線型座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

[*1] $x \neq 0$ であれば何でもいいことが分かります.

[*2] 実は一般論があって $\det(P)$ を調べなくても, この状況で P が正則となることが分かります. 167 ページの定理 6.3 で説明します.

によって線型変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\xi \\ -\eta \end{pmatrix}$$

と表現されることが示されました．

この 6.2.2 節を締めくくるのにあたって，α, β, $\vec{p}$, $\vec{q}$ に対応する定義を行います．

定義 6.2. $A \in M_2(\mathbf{R})$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v},\ \vec{v} \neq \vec{0}$$

を満たす $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ が存在するとき α を A の固有値と呼びます．また，このとき $\vec{v}$ を α に対する固有ベクトルと呼びます．

定理 6.1 によると $\alpha \in \mathbf{R}$ が A の固有値であることと

$$\Phi_A(\alpha) = 0$$

であることと必要十分であることが分かります．それは

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v} \Leftrightarrow (\alpha I_2 - A)\vec{v} = \vec{0}$$

を確認して定理 6.1 において $B = \alpha I_2 - A$ とすればすぐに分かります．

固有多項式が表す方程式

$$\Phi_A(\lambda) = 0$$

を**固有方程式**と呼びますが，固有値は固有多方程式の根とも言い換えることができます．

6.2.3　対角化可能な行列–十分条件

これまで行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して正則な $P \in M_2(\mathbf{R})$ を求めて

$$P^{-1}AP$$

を対角行列とすることを考えてきました．様々な定義を与えながら説明してきましたが，もう一度別の例で計算してみましょう．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

について考えます．この固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 6 \\ -4 & \lambda-9 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda-3)(\lambda-5)$$

より A の固有値は $\lambda = 3, 5$ であることが分かります．次にそれぞれの場合について固有ベクトルを求めましょう．
(i) $\lambda = 3$ のとき

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Leftrightarrow (3I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2x + 3y = 0 \end{aligned}$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{3}x \end{pmatrix} = \frac{x}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \ (x \neq 0)$$

であることが分かります．
(ii) $\lambda = 5$ のとき

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Leftrightarrow (5I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow x + y = 0 \end{aligned}$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ (x \neq 0)$$

であることが分かります．
　ここで

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ P = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

と定めます．このとき P は次の定理 6.3 によって正則となります．従って

$$A(\vec{p}\ \vec{q}) = (3\vec{p}\ 5\vec{q}) = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

となります.

定理 6.3. $A \in M_2(\mathbf{R})$ とします．相異なる $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対して $\vec{p},\ \vec{q} \in \mathbf{R}^2$ が

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p},\ A\vec{q} = \beta\vec{q}$$

$$\vec{p} \neq \vec{0},\ \vec{q} \neq \vec{0}$$

を満たすとします．このとき 2 次正方行列 $P = (\vec{p}\ \vec{q})$ は正則です.

この定理 6.3 を証明しましょう．P が正則であることと

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{p} + y\vec{q} = \vec{0} \Rightarrow x = y = 0$$

であることと必要十分条件ですから

$$x\vec{p} + y\vec{q} = \vec{0}$$

を仮定します．この両辺に $(\beta I_2 - A)$ を掛けると

$$(\beta I_2 - A)\vec{p} = ((\beta - \alpha)I_2 + (\alpha I_2 - A))\,\vec{p} = (\beta - \alpha)\vec{p},\ (\beta I_2 - A)\vec{q} = \vec{0}$$

から

$$x(\beta - \alpha)\vec{p} = \vec{0}$$

となります．$\beta - \alpha \neq 0$ から

$$x\vec{p} = \vec{0}$$

を得ますが，次の演習 6.1 から $x = 0$ となります．そして

$$y\vec{q} = \vec{0}$$

を得ますが，同様に $\vec{q} \neq \vec{0}$ から $y = 0$ を得ます．以上で $P = (\vec{p}\ \vec{q})$ が正則であることが証明されました.

演習 6.1. $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{v} \neq \vec{0}$ を満たすとします．このとき，$x\vec{v} = \vec{0}$ ならば $x = 0$ が従うことを示しましょう.

ある正則行列 P に対して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき $A \in M_2(\mathbf{R})$ は**対角化可能**であると定義します．上の定理 6.3 を用いると A の固有多項式が相異なる 2 実根を持つとき A は対角化可能であることが分かります．

定理 6.4. $A \in M_2(\mathbf{R})$ の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

が相異なる 2 実根 $\alpha,\ \beta$ を持つとき，A は対角化可能となります．

定理 6.4 を証明しましょう．$\Phi_A(\alpha) = \Phi_A(\beta) = 0$ であることから

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, \quad \vec{p} \neq \vec{0}$$
$$A\vec{q} = \beta\vec{q}, \quad \vec{q} \neq \vec{0}$$

を満たす $\vec{p},\ \vec{q} \in \mathbf{R}^2$ が存在します．ここで定理 6.3 を用いると $P = (\vec{p}\ \vec{q})$ は正則となります．さらに

$$AP = A(\vec{p}\ \vec{q}) = (A\vec{p}\ A\vec{q}) = (\alpha\vec{p}\ \beta\vec{q}) = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

であることが分かります．

演習 6.2. 以下の行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ を対角化しましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$　**(3)** $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

6.2.4　固有多項式が重根を持つ場合

$A \in M_2(\mathbf{R})$ の固有多項式が重根を持つと仮定します．すなわち $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$\phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$$

が成立すると仮定します．さらに A が対角化可能であるとします．すなわち正則な $P \in M_2(\mathbf{R})$ が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとします．このとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

とすると定理 6.2 から

$$(\lambda-\alpha)^2=\Phi_A(\lambda)=\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda)=(\lambda-\gamma_1)(\lambda-\gamma_2)$$

が従いますから

$$\gamma_1=\gamma_2=\alpha$$

であることが分かります．よって

$$P^{-1}AP=\alpha I_2$$

となりますが，この両辺に左から P を右から P^{-1} を掛けると

$$A=P\cdot\alpha I_2\cdot P^{-1}=\alpha I_2$$

であることが導かれます．以上から次の定理 6.5 を証明しました．

定理 6.5. $A\in M_2(\mathbf{R})$ の固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-\alpha)^2$$

と重根 $\alpha\in\mathbf{R}$ を持つとします．このとき A が対角化可能ならば $A=\alpha I_2$ となります．

例えば $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}$ は

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-\alpha & 0\\ -1 & \lambda-\alpha\end{vmatrix}=(\lambda-\alpha)^2$$

ですが，この定理 6.5 から対角化できないことが分かります．実は、$A\in M_2(\mathbf{R})$ が

$$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-\alpha)^2,\ A\neq\alpha I_2$$

ならばある正則行列 $P\in M_2(\mathbf{R})$ が存在して

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}$$

となります（6.3.5 節，177 ページ）．

6.2.5　行列の累乗

$A \in M_2(\mathbf{R})$ が対角化可能であるとします．すなわち，正則な P^{-1} が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となるとします．このとき A^n を A の固有値を用いて表すことができます．

実際，この式の両辺の n 乗はそれぞれ

$$\left(P^{-1}AP\right)^n = P^{-1}A^nP, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

と帰納的に計算できますから

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

さらに

$$A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

を示すことができます．

6.3　Cayley-Hamilton の定理

6.3.1　Cayley-Hamilton の定理

この 6.3 節では対角化を用いないで行列の累乗を計算する方法を学びます．

そのために 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は恒等的にある等式を満たすことを示します．

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+db \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$$(a+d)A = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} A^2-(a+d)A &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+db \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = -\det(A)I_2 \end{aligned}$$

が成立します．以上から，次の定理 6.6 を示しました．

定理 6.6.（Hamiton-Cayley の定理） *2* 次正方行列 A に対して

$$A^2-(a+d)A+\det(A)I_2 = O \tag{6.6}$$

が成立します．

この (6.6) は固有方程式

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+\det(A) = 0$$

に対して，変数 λ を A で，定数項を I_2 で置き換えた形になっていることに注意しましょう．

6.3.2 行列の累乗（単純固有値の場合）

ここで具体的な例をもとに Hamiton-Cayley の定理をどのように適用すれば A^n を計算できるか考えましょう．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

とします．このとき Hamiton-Cayley の定理によって

$$A^2-4A-5I_2 = O \tag{6.7}$$

が成立します．固有多項式が

$$\lambda^2-4\lambda-5 = (\lambda-5)(\lambda+1)$$

と因数分解できることに着目すると (6.7) は

$$A(A-5I_2) = (-1)(A-5I_2) \tag{6.8}$$

$$A(A+I_2) = 5(A+I_2) \tag{6.9}$$

と変形できます．これから

$$A^n(A-5I_2)=(-1)^n(A-5I_2) \tag{6.10}$$
$$A^n(A+I_2)=5^n(A+I_2) \tag{6.11}$$

が成立することが帰納的に証明できます．(6.10)–(6.11) から

$$(-6)A^n=(-1)^n(A-5I_2)-5^n(A+I_2)$$

を経て

$$A^n=-\frac{1}{6}\{(-1)^n(A-5I_2)-5^n(A+I_2)\}$$

を得ます．

一般に 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+\det(A)=0$$

が相異なる 2 根 α と β を持つと仮定します．

$$\alpha\neq\beta \tag{6.12}$$

このとき固有多項式は

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+\det(A)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$$

と因数分解でき，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=a+d,\quad \det(A)=\alpha\beta$$

も得ます．このことから A に対して Hamiton-Cayley の定理を適用すると

$$A^2-(\alpha+\beta)A+\alpha\beta I_2=O$$

が導かれます．これを

$$A(A-\alpha I_2)=\beta(A-\alpha I_2) \tag{6.13}$$
$$A(A-\beta I_2)=\alpha(A-\beta I_2) \tag{6.14}$$

と変形すれば，帰納的に

$$A^n(A-\alpha I_2)=\beta^n(A-\alpha I_2) \tag{6.15}$$
$$A^n(A-\beta I_2)=\alpha^n(A-\beta I_2) \tag{6.16}$$

を得ます．(6.15)−(6.16) から

$$(\beta-\alpha)A^n=(\beta^n-\alpha^n)A+\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})I_2$$

が従います．仮定 (6.12) から $\beta-\alpha\neq 0$ ですから公式

$$A^n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}A+\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\beta-\alpha}I_2 \tag{6.17}$$

を得ます．この公式 (6.17) を

$$A^n=\frac{\alpha^n}{\beta-\alpha}(\beta I_2-A)-\frac{\beta^n}{\beta-\alpha}(\alpha I_2-A) \tag{6.18}$$

と整理すると次の定理 6.7 を示したことになります．

定理 6.7. $A\in M_2(\mathbf{R})$ の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$$

が相異なる 2 実根 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ を持つとします．すなわち $\alpha\neq\beta$ が成立するとします．このとき n によらない 2 次正方行列 $X_0,\ X_1\in M_2(\mathbf{R})$ が存在して

$$A^n=\alpha^n X_0+\beta^n X_1$$

が成立します．

演習 6.3. 以下の行列 $A\in M_2(\mathbf{R})$ に対して，*Cayley-Hamilton* の定理を用いて A^n を求めましょう．

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix}1 & 12\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

6.3.3 固有値が重根の場合

今度は 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の固有方程式

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+\det(A)=0$$

が重根 α を持つとします．このとき固有多項式は

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+\det(A)=(\lambda-\alpha)^2$$

と因数分解でき，解と係数の関係から

$$2\alpha = a + d, \quad \det(A) = \alpha^2$$

も得ます．このことから A に対して Hamiton-Cayley の定理を適用すると

$$A^2 - 2\alpha A + \alpha^2 I_2 = O$$

が導かれます．このとき重根を持たない上の場合と同様に

$$A(A - \alpha I_2) = \alpha(A - \alpha I_2)$$

より

$$A^n(A - \alpha I_2) = \alpha^n(A - \alpha I_2) \tag{6.19}$$

を得ます．これから A^n を求めるには以下のようにします．$\alpha = 0$ の場合は $A^2 = O$ ですから，$A^n = O$ $(n \geq 2)$ となります．以下 $\alpha \neq 0$ の場合を考えます．$B = \frac{1}{\alpha}A$ と定めると $B^n = \frac{1}{\alpha^n}A^n$ が成立します．このとき (6.19) の両辺を $\frac{1}{\alpha^{n+1}}$ 倍して

$$B^{n+1} - B^n = B - I$$

が成立することが分かります．階差が一定の $B - I$ となりますから

$$B^n = B + (n-1)(B - I)$$

が分かります．これから

$$A^n = \alpha^{n-1}A + (n-1)\alpha^{n-1}(A - \alpha I_2) = n\alpha^{n-1}A - (n-1)\alpha^n I_2 \tag{6.20}$$

が導けます．

例 6.1. 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有多項式は

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$$

と計算されます．*Cayley-Hamilton* の定理によると

$$A^2 - 4A + 4I_2 = 0_2 \quad \text{すなわち} \quad A(A - 2I_2) = 2(A - 2I_2)$$

となります．ここで $B = \frac{1}{2}A$ と定めると，この式から

$$B^{n+1} - B^n = B - I_2$$

が従いますから

$$B^n = B + (n-1)(B-I) \quad \text{から} \qquad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I_2$$

を得ます．

演習 6.4. 以下の $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して *Cayley-Hamilton* の定理を用いて A^n を求めましょう．

(1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

6.3.4 行列の多項式

固有多項式が重根を持つ実 2 次正方行列 A に対して $A \in M_2(\mathbf{R})$ の n 乗を別の形で計算します．

λ の多項式

$$g(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

と一般の 2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$g(A) = a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_2$$

と定めます．別の多項式

$$f(\lambda) = b_\ell\lambda^k + b_{\ell-1}\lambda^{\ell-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0$$

があるとき

$$f(A) + g(A) = (f+g)(A), \ f(A)g(A) = (fg)(A)$$

が成立します．

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A) = 0$$

が重根 α を持つとします．このとき固有多項式は

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A) = (\lambda - \alpha)^2$$

と因数分解でます．λ^n を固有多項式 $(\lambda-\alpha)^2$ で割る余りを求めましょう．固有多項式が 2 次ですから，余りは λ の 1 次式です．従って

$$\lambda^n = \varphi(\lambda)(\lambda-\alpha)^2 + c\lambda + d \tag{6.21}$$

と定数 c と d を用いて表示できます．この式に $\lambda=\alpha$ を代入して

$$\alpha^n = c\alpha + d$$

を得ます．また (6.21) の両辺を λ で微分して

$$n\lambda^{n-1} = \varphi'(\lambda)(\lambda-\alpha)^2 + 2\varphi(\lambda)(\lambda-\alpha) + c$$

を得ますが，これに $\lambda=\alpha$ を代入して

$$n\alpha^{n-1} = c$$

が従います．以上から $c = n\alpha^{n-1}$ と $d = -n\alpha^n + \alpha^n$ となり

$$\lambda^n = \varphi(\lambda)(\lambda-\alpha)^2 + n\alpha^{n-1}\lambda + n\alpha^n - \alpha^n \tag{6.22}$$

が成立します．これに A を代入すると

$$A^n = n\alpha^{n-1}A - (n\alpha^n - \alpha^n)I_2 = n\alpha^{n-1}A - (n-1)\alpha^n I_2$$

と 174 ページの (6.20) を示すことができます．

演習 6.5. 以下の $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して上で示した方法を用いて A^n を求めましょう．
(1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **(4)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

演習 6.6. ここで示した方法を用いて *2* 次正方行列の固有多項式が重根を持たない場合に A^n を求めてください（*173* ページの公式 (6.17) を示してください）．

演習 6.7. 以下の行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して，演習 *6.6* で示した方法を用いて A^n を求めましょう．
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

6.3.5 固有方程式が重根を持つ場合の標準形–Jordan 標準形

今まで，固有多項式が相異なる実根を持つ場合，2 次正方行列が対角化可能であること示しました．2 次正方行列 A の固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ が，重根 α を持つ場合で対角化できる場合

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_2$$

から

$$A = P\alpha I_2 P^{-1} = \alpha I_2$$

と単位行列 I_2 の固有値倍であることが従います．したがって，単位行列の定数倍である場合を除けば，固有多項式が重根を持つ場合は行列 A は対角化できないことが分かります．しかし，この場合も *Jordan* **標準形**と呼ばれる単純な標準形があり，応用上有用です．

例 6.1 で考えた 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について考えてみます．A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$$

と $\lambda = 2$ を重根として持ちます．まず

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して $(A - 2I_2)\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ であるベクトル $\vec{p}_1$ を求めます．例えば

$$\vec{p}_1 = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\vec{p}_2 = (A - 2I_2)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります．このとき $(A - 2I_2)^2 = O_2$ が Cayley-Hamilton の定理から従い，

$$(A - 2I_2)\vec{p}_2 = (A - 2I_2)^2\vec{p}_1 = O_2\vec{p}_1 = \vec{0} \quad \text{i.e.} \quad A\vec{p}_2 = 2\vec{p}_2$$

を得ます．以上から

$$A\vec{p}_1 = 2\vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad A\vec{p}_2 = 2\vec{p}_2$$

を得ますが，これを $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ を用いて行列で表現すると

$$AP = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります．さらに行列 $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ は正則であることが分かります．実際

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0} \tag{6.23}$$

から $c_1 = c_2 = 0$ を示すことができます．(6.23) の両辺に $(A - 2I_2)$ をかけると

$$c_1\vec{p}_2 = \vec{0}$$

となります．$\vec{p}_2 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ が従います（演習 6.1, 167 ページ）．これを (6.23) に代入すると

$$c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$$

を経て，$c_1 = 0$ を得ます．以上で

$$A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

を得ます．

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$

を帰納的に示すことができますから

$$A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

を得ます．

一般に実 2 次正方行列 A の固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ が重根を持ち，A が単位行列の定数倍でない場合は

$$A = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}P^{-1}$$

を満たす正則行列を上のように構成することができます．

演習 6.8. 以下の $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して *Jordan* 標準形を求めましょう．

(1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$　**(2)** $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$　**(3)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$