n 次実対称行列の対角化

Nobuyuki TOSE

January 05, 2020

定理1

n 次の実対称行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ に対して $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ が相異なる場合：$\alpha \neq \beta$

$$V(\alpha) \perp V(\beta)$$

が成立します.

$\vec{p} \in V(\alpha)$, $\vec{q} \in V(\beta)$ とします.

$$(A\vec{p}, \vec{q}) = (\alpha\vec{p}, \vec{q}) = \alpha(\vec{p}, \vec{q})$$

$$(A\vec{p}, \vec{q}) == (\vec{p}, {}^tA\vec{q}) = (\vec{p}, A\vec{q}) = (\vec{p}, \beta\vec{q}) = \beta(\vec{p}, \vec{q})$$

から

$$(\alpha - \beta)(\vec{p}, \vec{q}) = 0$$

が従います.

定理 2

定理 2

3 次の実対称行列 A に対して以下が成立します.

(1)

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \cdots (\lambda - \alpha_n) \ \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$$

(2) 直交行列 $P \in O(n)$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

が成立します.

定理 2 の証明 (1)

(2) を証明します．α_1 に対して

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ \|\vec{p}_1\| = 1$$

を満たす $\vec{p}_1 \in \mathbf{R}^3$ が存在します．このとき以下が成立します．

$V := (\mathbf{R}\vec{p}_1)^\perp$ は A 不変である．すなわち

$$\vec{v} \in V \ \Rightarrow\ A\vec{v} \in V$$

実際 $\vec{p}_1, \vec{v} = 0$ とすると

$$(\vec{p}_1, A\vec{v}) = ({}^t A\vec{p}_1, \vec{v}) = (A\vec{p}_1, \vec{v}) = \alpha_1(\vec{p}_1, \vec{v}) = 0$$

から分かります.

定理 2 の証明 (2)

正規直交基底の延長を用いて $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$$

が構成できます．$\vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ が V の正規直交基底であることに注意しましょう．
直交行列 $P = (\vec{p}_1 \ \cdots \ \vec{p}_n) \in O(n)$ を定義します．このとき $2 \leq j \leq n$ のとき $\vec{p}_j \in V$ から $A\vec{p}_j \in V$ が分かります．従って

$$A\vec{p}_j = *\vec{p}_2 + \cdots + *\vec{p}_n$$

から

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ \cdots \ A\vec{p}_n) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \cdots \ \vec{p}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

となります

定理 2 の証明 (3)

$$
{}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}
$$

の左辺は

$$
{}^t\left({}^tPAP\right) = {}^tP{}^tA^t\left({}^tP\right) = {}^tPAP
$$

から対称であることが分かります．右辺が対称であることと右辺の転置が

$$
\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & {}^tB & \\ 0 & & & \end{pmatrix}
$$

となることから

$$
{}^tB = B
$$

であることが分かります．

定理 2 の証明 (4)

B が対称であることから $Q_0 \in O(n-1)$ が存在して

$$
{}^tQ_0BQ_0 = \begin{pmatrix} \beta_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}
$$

となります．$Q := \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q_0 \end{pmatrix} \in O(n)$ で

$$
{}^tQ\,{}^tPAPQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & {}^tQ_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & {}^tQ_0BQ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}
$$

から $R = PQ \in O(n)$ で ${}^tR = {}^tQ\,{}^tP$ なので

$$
{}^tRAR = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & {}^tQ_0BQ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}
$$