行列に関する補足 (2)
回転行列

Nobuyuki TOSE

Oct 18, 2017
V02 Oct 03, 2019
V03 Oct 19, 2020 for CalcNT

回転行列

回転行列

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ を**回転行列**と呼ぶ.

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

から

$$R_{\theta_1}R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$$

回転行列の逆は回転行列

特に $\theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = -\alpha$（$\theta_1 = -\alpha$, $\theta_2 = \alpha$）とすると

$$R_\alpha R_{-\alpha} = R_{-\alpha} R_\alpha = R_0 = I_2$$

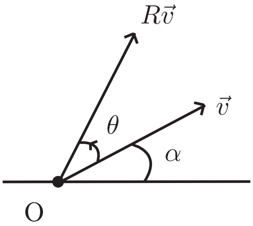
から回転行列 R_α は正則で

$$\begin{aligned}(R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha} &= \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= {}^t\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = {}^tR_\alpha\end{aligned}$$

なぜ回転？

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

から R_θ がベクトルを角度 θ 回転することが分かります.



転置行列 (1)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ に対して転置行列を

$$ {}^t A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \end{pmatrix} = ({}^t\mathbf{a}_1 \ {}^t\mathbf{a}_2) \tag{1} $$

と定義します.

転置行列の基本性質

$$ (A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^t A\vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2) $$

転置行列 (2)

$\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ に対して

$$\begin{aligned}
(A\vec{v}, \vec{w}) &= (x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2, \vec{w}) = x(\vec{a}_1, \vec{w}) + y(\vec{a}_2, \vec{w}) \\
&= \left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \begin{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{w}) \\ (\vec{a}_2, \vec{w}) \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \vec{w} \\ {}^t\vec{a}_2 \vec{w} \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \end{pmatrix} \vec{w} \right) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})
\end{aligned}$$

回転行列の性質 (1)

定理

$$(R_\theta \vec{v}, R_\theta \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$$

$$(R_\theta \vec{v}, R_\theta \vec{w}) = (\vec{v}, {}^t(R_\theta) R_\theta \vec{w}) = (\vec{v}, (R_\theta)^{-1} R_\theta \vec{w}) = (\vec{v}, I_2 \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \tag{2}$$

回転行列の性質 (2)

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^2$ のなす角が φ ならば

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos\varphi$$

であることを用いると，前のページの公式 (2) はほぼ明らかであろう．