

# 行列に関する補足 (2)

## 回転行列

Nobuyuki TOSE

October 18, 2017  
V02 October 03, 2019

# 回転行列

## 回転行列

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$  を回転行列と呼ぶ.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$$

## 回転行列の逆は回転行列

特に  $\theta_1 = \alpha$ ,  $\theta_2 = -\alpha$  ( $\theta_1 = -\alpha$ ,  $\theta_2 = \alpha$ ) とすると

$$R_\alpha R_{-\alpha} = R_{-\alpha} R_\alpha = R_0 = I_2$$

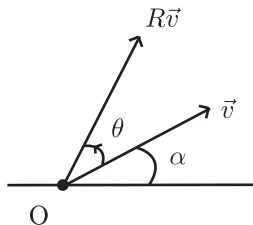
から回転行列  $R_\alpha$  は正則で

$$\begin{aligned}(R_\alpha)^{-1} &= R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= {}^t \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = {}^t R_\alpha\end{aligned}$$

# なぜ回転？

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta) \\ \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix}$$

から  $R_\theta$  がベクトルを角度  $\theta$  回転することが分かります。



# 転置行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$  に対して転置行列を

$${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \end{pmatrix} = ({}^t\mathbf{a}_1 \ {}^t\mathbf{a}_2) \quad (1)$$

と定義します.

転置行列の基本性質

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$$

# 回転行列の性質

定理

$$(R_\theta \vec{v}, R_\theta \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$$

$$(R_\theta \vec{v}, R_\theta \vec{w}) = (\vec{v}, {}^t(R_\theta)R_\theta \vec{w}) = (\vec{v}, (R_\theta)^{-1}R_\theta \vec{w}) = (\vec{v}, I_2 \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$$