行列に関する補足 (1)

正則性

Nobuyuki TOSE

Oct. 18, 2017
V02 Oct. 03, 2019
V03 Oct. 19, 2020 for CalcNT

行列の正則性

余因子行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

を A の**余因子行列**と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

から

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_2$$

が従う.

注意

2 次正方行列 $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) \in M_2(\mathbf{R})$, $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2) \in M_2(\mathbf{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda \cdot \mu)A$$

正則性

正則行列

2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対してある $X \in M_2(\mathbf{R})$ が存在して

$$AX = XA = I_2$$

が成立するとき A は正則であるという．

注意

$$\left.\begin{array}{l} AX = XA = I_2 \\ AY = YA = I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow X = Y$$

が成立するので X を A の**逆行列**と呼ぶ（A^{-1} と記す）．

正則性（十分条件）

定理

$|A| = ad - bc \neq 0$ ならば A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_2$$

の両辺を $\frac{1}{|A|}$ 倍する.

$$A \cdot \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} \cdot A = I_2$$

正則性の必要条件

定理

(1) A が正則 $\Rightarrow \left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\right)$

(2) $|A|\neq 0 \ \Rightarrow \ \left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\right)$

(1)

$$A\vec{v}=\vec{0}\longrightarrow A^{-1}A\vec{v}=A^{-1}\vec{0}=\vec{0}\longrightarrow \vec{v}=I_2\vec{v}=\vec{0}$$

(2)

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & b\\ 0 & d\end{vmatrix}}{|A|}=0 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a & 0\\ c & 0\end{vmatrix}}{|A|}=0$$

(2) の逆

定理

(3) ((2) の逆) $\left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}\right) \Rightarrow |A| \neq 0$

(3)' ((3) の対偶) $|A| = 0 \Rightarrow$ ある$\vec{v} \neq 0$に対して$A\vec{v} = \vec{0}$

(3)' を示す． $|A| = ad - bc = 0$ ならば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となるので， $NOT(a = b = c = d = 0)$ ならばある $\vec{v} \neq \vec{0}$ が $A\vec{v} = \vec{0}$ を満たす． 他方 $a = b = c = d = 0$ のときは明らかである．

まとめ

以上によって次の定理を示した.

定理

以下の (i),(ii),(iii) は同値である.

(i) A は正則である.

(ii) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

(iii) $|A| \neq 0$

補足 (i)⇒(iii) の別証明

$A \in M_2(\mathbf{K})$ が正則とする．このとき

$$AA^{-1} = I_2$$

両辺の行列式を考えると

$$|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|, \quad |I_2| = 1$$

から $|A| \neq 0$ が従います.

$A, B \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$