

行列に関する補足 (1)

正則性

Nobuyuki TOSE

October 18, 2017
V02 October 03, 2019

行列の正則性

余因子行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

を A の余因子行列と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

から

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_2$$

が従う.

正則性

正則行列

2次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対してある $X \in M_2(\mathbf{R})$ が存在して

$$AX = XA = I_2$$

が成立するとき A は正則であるという。

注意

$$\left. \begin{array}{l} AX = XA = I_2 \\ AY = YA = I_2 \end{array} \right\} \Rightarrow X = Y$$

が成立するので X を A の逆行列と呼ぶ (A^{-1} と記す)。

正則性（十分条件）

定理

$|A| = ad - bc \neq 0$ ならば A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_2$$

の両辺を $\frac{1}{|A|}$ 倍する.

$$A \cdot \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \cdot A = I_2$$

正則性の必要条件

定理

$$(1) A \text{ が正則} \Rightarrow \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$

$$(2) |A| \neq 0 \Rightarrow \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$

(1)

$$A\vec{v} = \vec{0} \longrightarrow A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0} \longrightarrow \vec{v} = I_2\vec{v} = \vec{0}$$

(2)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{|A|} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = 0$$

(2) の逆

定理

(3) ((2) の逆) $(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}) \Rightarrow |A| \neq 0$

(3)' ((3) の対偶) $|A| = 0 \Rightarrow$ ある $\vec{v} \neq \vec{0}$ に対して $A\vec{v} = \vec{0}$

(3)' を示す. $|A| = ad - bc = 0$ ならば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となるので, $NOT(a = b = c = d = 0)$ ならばある $\vec{v} \neq \vec{0}$ が $A\vec{v} = \vec{0}$ を満たす. 他方 $a = b = c = d = 0$ のときは明らかである.

まとめ

以上によって以下の定理を示した.

定理

以下は同値である.

- (1) A は正則である.
- (2) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- (3) $|A| \neq 0$