# 階数標準形、など

**定理** $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$（$m \times n$ 行列）に対して $\exists P \in GL_m(\mathbb{K})$, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$ が存在して

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_\ell & O_{\ell, n-\ell} \\ \hline O_{m-\ell, \ell} & O_{m-\ell, n-\ell} \end{array}\right)$$

---

$\ker(A)$ の次元を $n-\ell$ として基底を $\vec{q}_{\ell+1}, \dots, \vec{q}_n \in \mathbb{K}^n$ とします。これを $\mathbb{K}^n$ の基底として

$$\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell, \vec{q}_{\ell+1}, \dots, \vec{q}_n$$

と拡張(延長)します。このとき $Q = (\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_n)$ は正則で

$$AQ = (A\vec{q}_1 \cdots A\vec{q}_\ell \ \vec{0} \cdots \vec{0})$$

となります。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "\sim", "Q\cdot"'] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "A\cdot"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, bend right, "R^{-1}\cdot = P\cdot"'] & \mathbb{K}^m \arrow[l, "R\cdot"'] \end{tikzcd}$$

＃ $\vec{r}_1 := A\vec{q}_1, \cdots, \vec{r}_\ell := A\vec{q}_\ell$ は LI となります（次元定理の証明の本質的な部分）

これを拡張して $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_\ell, \vec{r}_{\ell+1}, \cdots, \vec{r}_m$ とします. $R = (\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_m)$ は正則となります（$P = R^{-1}$ は正則となります.）このとき.

$$PAQ = P(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_\ell\ \vec{0} \cdots \vec{0}) = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_\ell\ \vec{0} \cdots \vec{0})$$

となりますから証明が済みます.

演習　$P_1, P_2 \in GL_m(\mathbb{K})$, $Q_1, Q_2 \in GL_n(\mathbb{K})$ が

$$P_1 A Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_\ell & O \\ \hline O & O \end{array}\right), \quad P_2 A Q_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_{\ell'} & \\ \hline & \end{array}\right)$$

となるならば $\ell = \ell'$ であることを示しましょう（直接示します）.

列基本変形。　c は列を意味する。

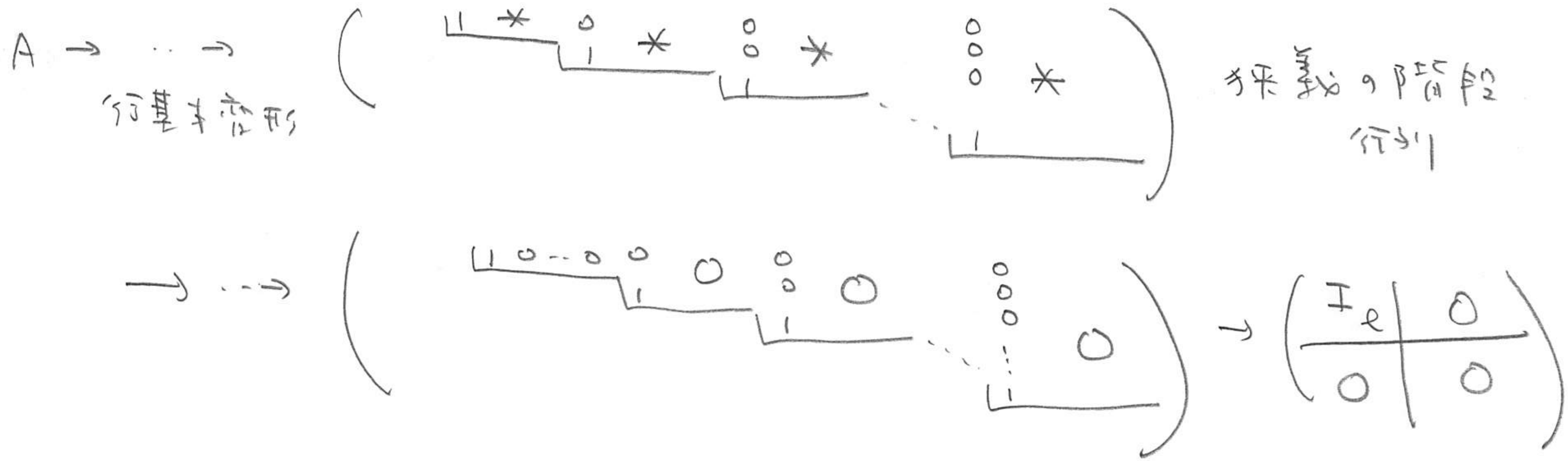
(i) $i \neq j$　　$ic \leftrightarrow ic$

(ii) $\lambda \neq 0$　　$ic \times \lambda$

(iii) $i \neq j$　　$ic + jc \times \lambda$.

を列基本変形と呼びます。

・列基本変形は対応する基本行列を右からかけます。



定理 $\dim \mathrm{Im}(A) = \dim \mathrm{Im}({}^tA)$.

別の証明が参考として有る. $\exists P \in GL_m(\mathbb{K})$, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_\ell & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

$${}^tQ\,{}^tA\,{}^tP = \left(\begin{array}{c|c} I_\ell & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

において ${}^tQ$, ${}^tP$ は正則となるので定理が従う.

注 $Q$ が正則のとき

$\mathrm{Im}(AQ) = \mathrm{Im}(A)$ 　 参考 $\left(\begin{array}{l} \dim \ker(AQ) \\ = \dim \ker(A) \end{array}\right)$

$P$ が正則のとき

$\dim \mathrm{Im}(PA) = \dim \mathrm{Im}(A)$. $\left( \ker(PA) = \ker(A) \right)$

証明は演習を参照のこと

**定理**　$P \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow {}^tP \in GL_n(\mathbb{K})$

（証明）

$$PX = XP = I_n$$

をみたす $X \in M_n(\mathbb{K})$ が存在すると

$$ {}^tP\,{}^tX = {}^tX\,{}^tP = I_n$$

が従う．

## 定理

$$\dim \mathrm{Im}(A) = l$$

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, \vec{a}_{j_1}, \ldots, \exists\, \vec{a}_{j_l}$ が LI.

$\forall\, \vec{a}_{k_1}, \ldots, \vec{a}_{k_{l+1}}$ が LD

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, a|_{i_1}, \ldots, a|_{i_l}$ が LI

$\forall\, a|_{k_1}, \ldots, a|_{k_l}$ が LD.

( $\Longleftrightarrow$ $\exists$ A の $l$ 次小行列式 $A'$ に対して $|A'| \neq 0$

$\forall$ A の $(l+1)$ 次 ——— $A''$ に対して $|A''| = 0$ )

これは行列式が準備できると示される. (本質的な部分は示してある)