3 次直交行列　$O(3)$

Nobuyuki TOSE

2020 V002
2020/10/30 SLIN L13 V003b

復習—2次元の場合

2次の実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ はある直交行列（または回転行列）P で対角化可能だった：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

なぜ直交行列を用いるのか？ $P^{-1} = {}^tP$ も直交なので

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(P^{-1}AP \cdot P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2\end{aligned}$$

復習—2 次元の場合 (2)

定義 $P \in M_2(\mathbf{R})$ が<u>直交行列</u>であるとは

$$ {}^tPP = P\,{}^tP = I_2 $$

を満たすときであった．$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ のとき

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \end{pmatrix} (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} \|\vec{p}_1\|^2 & (\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ (\vec{p}_2, \vec{p}_1) & \|\vec{p}_2\|^2 \end{pmatrix} = I_2 $$

から定義の条件は

$$ \|\vec{p}_1\|^2 = \|\vec{p}_2\|^2 = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0 $$

と同値である．

定義とその言い換え (1)

3 次正方行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ が直交行列であるとは

$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad \left(\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3\right) \tag{1}$$

が成立するときである.

定義とその言い換え (2)

$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = ({}^tPP\vec{v}, \vec{w}) \tag{2}$$

であることから定義の条件 (1) は

$${}^tPP = I_3 \tag{3}$$

と同値である．実際 (2) を用いると (1) は

$$(({}^tPP) - I_3)\vec{v}, \vec{w}) = 0 \quad \left(\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3\right)$$

と同値であるが，さらに任意の $\vec{w} \in \mathbf{R}^3$ に対して成立することを用いると

$$({}^tPP - I_3)\vec{v} = \vec{0} \quad \left(\vec{v} \in \mathbf{R}^3\right)$$

と同値であることが分かる．これは

$${}^tPP - I_3 = O_3$$

と同値です.

定義とその言い換え (3)

条件 (3) すなわち ${}^tPP = I_3$ が成立するならば，両辺の行列式をとると

$$\det(P)^2 = \det(I_3) = 1 \quad 従って \quad \det(P) = \pm 1$$

となりますから，P は正則であることが分かります．従って ${}^tPP = I_3$ から

$$P^{-1} = {}^tP$$

が成立します．さらに

$$P\,{}^tP = I_3$$

も成立します．以上で条件 (3) は

$${}^tPP = P\,{}^tP = I_3 \tag{4}$$

と同値であることが示されました．

定義とその言い換え (4)

$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ のとき

$$ {}^t PP = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_3 \end{pmatrix} (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = \begin{pmatrix} \|\vec{p}_1\|^2 & (\vec{p}_1,\vec{p}_2) & (\vec{p}_1,\vec{p}_3) \\ (\vec{p}_2,\vec{p}_1) & \|\vec{p}_2\|^2 & (\vec{p}_2,\vec{p}_3) \\ (\vec{p}_3,\vec{p}_1) & (\vec{p}_3,\vec{p}_2) & \|\vec{p}_3\|^2 \end{pmatrix} = I_3 $$

から定義の条件は

$$ \|\vec{p}_1\|^2 = \|\vec{p}_2\|^2 = \|\vec{p}_3\|^2 = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0 $$

と同値である.

定義とその言い換え (5)—まとめ

$P \in M_3(\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{aligned}
&P\text{は直交行列である．すなわち}\quad (P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad \left(\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3\right)\\
&\Leftrightarrow {}^tPP = I_3\\
&\Leftrightarrow {}^tPP = P{}^tP = I_3\\
&\Leftrightarrow \|\vec{p}_1\|^2 = \|\vec{p}_2\|^2 = \|\vec{p}_3\|^2 = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0
\end{aligned}$$

ここで 3 次の直交行列全体の集合を

$$O(3) := \{P \in M_3(\mathbf{R});\ P\text{は直交}\}$$

と定義します.

直交行列に関する注意

一般に $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $B \in M_{n,\ell}(\mathbf{R})$ に対して

$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

が成立することに注意しましょう．これを用いると

$$P_1, P_2 \in O(3) \Rightarrow P_1P_2 \in O(3), P_1^{-1} \in O(3)$$

であることが分かります．さらに $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}-\vec{w}\|^2\right)$$

が成立します．これから

$$P \in O(3) \Leftrightarrow \|P\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^3)$$

が成立することが示せます．