行列の演算

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2011 年 04 月 19,26 日 at 駒場
2020 年 06 月 22 日　経済数学入門

ベクトルの演算の性質（復習）

定理 1

(1) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{2}$$

(2) $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbf{K}^n$ と $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ に対して

$$\lambda\,(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \tag{3}$$

$$(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \tag{4}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \tag{5}$$

和と定数倍

$m \times n$ 行列，すなわち m 行 n 列の行列

$$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_j \cdots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

$$B = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_j \cdots \vec{b}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} = (b_{ij})$$

に対して

和と定数倍 (2)

その和と差を

$$A+B=\left(\vec{a}_1+\vec{b}_1 \cdots \vec{a}_j+\vec{b}_j \cdots \vec{a}_n+\vec{b}_n\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}=(a_{ij}+b_{ij})$$

$$A-B=\left(\vec{a}_1-\vec{b}_1 \cdots \vec{a}_j-\vec{b}_j \cdots \vec{a}_n-\vec{b}_n\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}=(a_{ij}-b_{ij})$$

と定めます.

和と定数倍 (3)

定数 $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して A の α 倍を

$$\alpha A = (\alpha\vec{a}_1 \ \cdots \ \alpha\vec{a}_j \ \cdots \ \alpha\vec{a}_n) = \begin{pmatrix} \alpha\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \alpha\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \alpha\boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} = (\alpha \cdot a_{ij})$$

定理2

m 行 n 列の行列 A，B，C に対して，以下が成立します．
(1) $A+B=B+A$
(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$
(3) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$
(4) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
(5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$A=(\vec{a}_j)$, $B=(\vec{b}_j)$, $C=(\vec{c}_j)$ と行列 A，B，C の j 列を用いて定理2を示します．

証明

(1) $A + B = (\vec{a}_j + \vec{b}_j) = (\vec{b}_j + \vec{a}_j) = B + A$
から証明できます．ここで定理1の(1)を用いました．

(2) $(A + B) + C = (\vec{a}_j + \vec{b}_j) + (\vec{c}_j) = \Big((\vec{a}_j + \vec{b}_j) + \vec{c}_j\Big) = \Big(\vec{a}_j + (\vec{b}_j + \vec{c}_j)\Big) = A + (B + C)$
から証明できます．ここで定理1の(2)を用いました．

行列 × 列ベクトル(1)

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

との積を

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n \in \mathbf{K}^m$$

行列 × 列ベクトル (2)

$$
\begin{aligned}
A\vec{x} &= x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_j\vec{a}_j + \ldots + x_n\vec{a}_n \\
&= \begin{pmatrix} \vdots \\ x_1 a_{i1} + \ldots + x_j a_{ij} + \ldots + x_n a_{in} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i\vec{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m\vec{x} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

行列 $\times$ 行列

$X = (\vec{x}_1 \ \ldots \ \vec{x}_k \ \ldots \ \vec{x}_\ell)$ が n 行 ℓ 列とします.

注 $A\vec{x}_1, \ldots, A\vec{x}_k, \ldots, A\vec{x}_\ell \in \mathbf{K}^m$ が定義される.

$$
\begin{aligned}
AX &= A(\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_k \ \cdots \ \vec{x}_\ell) \\
&= (A\vec{x}_1 \ \cdots \ A\vec{x}_k \ \cdots \ A\vec{x}_\ell) \\
&= \begin{pmatrix}
\mathbf{a}_1\vec{x}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1\vec{x}_k & \cdots & \mathbf{a}_1\vec{x}_\ell \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{a}_i\vec{x}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i\vec{x}_k & \cdots & \mathbf{a}_i\vec{x}_\ell \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{a}_m\vec{x}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m\vec{x}_k & \cdots & \mathbf{a}_m\vec{x}_\ell
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

行列 × 行列 (2)

特に $m = 1$, すなわち $A = \mathbf{a} = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ のとき

$$\mathbf{a}X = (\mathbf{a}\vec{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}\vec{x}_\ell)$$

これを用いると

$$AX = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 X \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i X \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m X \end{pmatrix}$$

行列 × 行列 (3)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}X &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}\vec{x}_1 & \cdots & \mathbf{a}\vec{x}_k & \cdots & \mathbf{a}\vec{x}_\ell \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cdots & a_1x_{1k} + a_2x_{2k} + \cdots + a_nx_{nk} & \cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{matrix} & a_1\begin{pmatrix} \cdots & x_{1k} & \cdots \end{pmatrix} \\ + & a_2\begin{pmatrix} \cdots & x_{2k} & \cdots \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots \\ + & a_n\begin{pmatrix} \cdots & x_{nk} & \cdots \end{pmatrix} \end{matrix} \\
&= a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n
\end{aligned}
$$

行列×行列(4)—行ベクトルを中心にして

まとめ

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_j \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_j\mathbf{x}_j + \cdots + a_n\mathbf{x}_n$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 X \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i X \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m X \end{pmatrix}$$

線型写像 (1)

$$F_A(\vec{x}) = A\vec{x}$$

によって定る写像

$$F_A : \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m \quad \vec{x} \mapsto A\vec{x} \tag{7}$$

について定理 3 が成立します（F_A の線型性）

定理 3

$$F_A(\vec{x} + \vec{y}) = F_A(\vec{x}) + F_A(\vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n) \tag{8}$$

$$F_A(\lambda\vec{x}) = \lambda F_A(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbf{K}^n, \ \lambda \in \mathbf{K}) \tag{9}$$

線型写像 (2)—定理 3 の証明

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ と $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の成分表示をします．すると

$$\begin{aligned}
F_A(\vec{x}+\vec{y}) &= (x_1+y_1)\vec{a}_1 + \cdots + (x_j+y_j)\vec{a}_j + \cdots + (x_n+y_n)\vec{a}_n \\
&= x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n \\
&\qquad + y_1\vec{a}_1 + \cdots + y_j\vec{a}_j + \cdots + y_n\vec{a}_n \\
&= F_A(\vec{x}) + F_A(\vec{y}) \\
F_A(\lambda\vec{x}) &= (\lambda x_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\lambda x_j)\vec{a}_j + \cdots + (\lambda x_n)\vec{a}_n \\
&= \lambda(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n) = \lambda F_A(\vec{x})
\end{aligned}$$

線型写像(3)—定理3の拡張

行列の積の形では

$$A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x}+A\vec{y}, \quad A(\lambda\vec{x}) = \lambda\,(A\vec{x}) \tag{10}$$

と表されます．これをまとめて得られる

$$\boxed{A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda A\vec{x}+\mu A\vec{y} \tag{11}}$$

および (10) を繰り返して得られる

$$A(c_1\vec{x}_1+\cdots+c_\ell\vec{x}_\ell) = c_1A\vec{x}_1+\cdots+c_\ell A\vec{x}_\ell \tag{12}$$

も有用です．この公式 (12) は $X = (\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_\ell)$ と $\vec{c} = {}^t(c_1 \ \cdots \ c_\ell)$ を用いて

$$A(X\vec{c}) = (AX)\vec{c} \tag{13}$$

とも表現できます．

写像の合成

2 つの写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ があるとします．このとき

$$g \circ f\colon X \to Z \quad x \mapsto g(f(x))$$

が定義できます．これを f と g の合成写像と呼びます．
さらに写像 $h\colon Z \to W$ がある場合は

$$h \circ g \circ f\colon X \to W$$

が定義できますが，これは

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

と，合成をどの順序で行っても変わりません．

行列の積の性質 (1)

定理 4 A と B は $m \times n$ 行列，X と Y は $n \times \ell$ 行列，Q は $\ell \times g$ 行列とします．このとき次が成立します.

(1) $(A+B)X = AX + BX$

(2) $A(X+Y) = AX + AY$

(3) $A(\alpha X) = (\alpha A)X = \alpha(AX)$

(4)（結合法則） $(AX)Q = A(XQ)$

行列の積の性質 (2)—証明の準備（その 1）

定理 4 の証明の準備として $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$, $B = \left(\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n\right)$ と $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$(A+B)\,\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} \tag{14}$$

を示します．実際

$$\begin{aligned}
(A+B)\vec{x} &= \left(\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n + \vec{b}_n\right)\vec{x} \\
&= x_1(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + \cdots + x_n(\vec{a}_n + \vec{b}_n) \\
&= x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n + x_1\vec{b}_1 + \cdots + x_n\vec{b}_n = A\vec{x} + B\vec{x}
\end{aligned}$$

と示すことができます．

行列の積の性質(3)—証明の準備（その2）

(10) で以下の最初の等号を示しましたが

$$A(\alpha\vec{x}) = \alpha\left(A\vec{x}\right) = (\alpha A)\vec{x} \tag{15}$$

が成立することも定理 4 の **(3)** の証明で使います．実際，2 番目の等号は $\vec{x} = {}^t(x_1 \ \cdots \ x_n)$ として

$$\begin{aligned}(\alpha A)\,\vec{x} &= \begin{pmatrix}\alpha\vec{a}_1 & \cdots & \alpha\vec{a}_n\end{pmatrix}\vec{x} \\ &= x_1\alpha\vec{a}_1 + \cdots + x_n\alpha\vec{a}_n = \alpha\bigl(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n\bigr) = \alpha\bigl(A\vec{x}\bigr)\end{aligned}$$

行列の積の性質 (4)—証明 (1)

(1)

両辺の k 列を比較します.

$$(A+B)\vec{x}_k = A\vec{x}_k + B\vec{x}_k$$

から分かります（(14) 参照）.

(2) 両辺の k 列を比較します.

$$A(\vec{x}_k + \vec{y}_k) = A\vec{x}_k + A\vec{y}_k$$

から分かります（(10) 参照）.

(3) 各辺の k 列を比較しますが (15) は

$$A(\alpha\vec{x}_k) = (\alpha A)\vec{x}_k = \alpha(A\vec{x}_k)$$

を導きます.

行列の積の性質 (5)—証明 (2)

(4) (13) を用いると $\vec{q} \in \mathbf{K}^{\ell}$ に対して

$$A\,(X\vec{q}) = (AX)\,\vec{q}$$

が成立します．Q の t 列を $\vec{q}_t$ とすると

$$A\,(X\vec{q}_t) = (AX)\,\vec{q}_t$$

ですが，これは示すべき式の t 列が等しいことを意味します．これを用いると

$$\begin{aligned} A(XQ) &= A(X\vec{q}_1 \ \cdots \ X\vec{q}_g) = (A(X\vec{q}_1) \ \cdots \ A(X\vec{q}_g)) \\ &= ((AX)\vec{q}_1 \ \cdots \ (AX)\vec{q}_g) = (AX)(\vec{q}_1 \ \cdots \ \vec{q}_g) = (AX)Q \end{aligned}$$