逆行列の計算

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2008 年 12 月 10 日 at 駒場 LII
2019 年 07 月 19 日 at 駒場 SI

逆行列の計算

$$
\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

$$
\to
\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}
$$

$$
\to
\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}
$$

逆行列の計算

- 以上の計算から

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- その説明
  (i) 行基本変形 = 基本行列を左から掛ける
  (ii) 基本行列は正則である

$$P_\ell \cdots P_1 (A|I_3) = (I_3|B)$$

$$\longrightarrow (P_\ell \cdots P_1 A | P_\ell \cdots P_1 I_3) = (I_3|B)$$

行基本変形 = 左から基本行列を掛ける

- $\quad \mathbf{2}r+ = (-\mathbf{2}) \times \mathbf{1}r$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{2}r \leftrightarrow \mathbf{3}r$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

行基本変形 = 左から基本行列を掛ける (No.2)

- $3r \times = \frac{1}{2} \times 1r$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \frac{1}{2}\mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$$

- **N.B.**

$$(\alpha\ \beta\ \gamma) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2 + \gamma\mathbf{a}_3$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 A \\ \mathbf{p}_2 A \\ \mathbf{p}_3 A \end{pmatrix}$$

基本行列は正則

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I_3$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = I_3$$

- A と B が正則ならば AB も正則

$$AX = XA = I_n, BY = YB = I_n$$

とすると

$$ABYX = A(BY)X = AI_nX = AX = I_n$$

$$YXAB = Y(XA)B = YI_nB = YB = I_n$$

から YX が AB の逆行列である。

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

正則行列について (No.2)

- $\boldsymbol{A}$ が正則ならば $\boldsymbol{A}^{-1}$ も正則

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{I_n}$$

とすると

$$\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{A}$$

が分かる。

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$$

行列の積について（補足）

- A が $m \times n$ 行列、P が $n \times \ell_1$ 行列、Q が $n \times \ell_2$ 行列

$$A(P|Q) = (AP|AQ)$$

- 説明

$$\begin{aligned} A(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_{\ell_1} | \vec{q}_1 \cdots \vec{q}_{\ell_2}) &= (A\vec{p}_1 \cdots A\vec{p}_{\ell_1} | A\vec{q}_1 \cdots A\vec{q}_{\ell_2}) \\ &= (AP|AQ) \end{aligned}$$

なぜこの計算で（再論）

- 基本行列 $P_i \ (i = 1, \cdots, \ell)$ が存在して
$$P_\ell \cdots P_1 \, (A | I_3) = (I_3 | B)$$
$$\longrightarrow (P_\ell \cdots P_1 A | P_\ell \cdots P_1 I_3) = (I_3 | B)$$
$$\longrightarrow P_\ell \cdots P_1 A = I_3, \ P_\ell \cdots P_1 = B$$
から B は正則で、$BA = I_3$ を得る。
- 両辺に B^{-1} を左から掛ける
$$\longrightarrow A = B^{-1}$$
から A は正則で、
$$A^{-1} = \left(B^{-1}\right)^{-1} = B$$