スペクトル分解入門

$A \in M_3(\mathbb{K})$ が相異なる3個の固有値を持つとします:

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}, \quad \alpha \neq \beta, \quad \beta \neq \gamma, \quad \gamma \neq \alpha$$

このとき $\exists P \in M_3(\mathbb{K})$ で P は正則かつ

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

従って $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$, $A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$, $A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$

$f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ とすると $f(\lambda) = a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0$.

$$\begin{aligned} f(A)\vec{p}_1 &= (a_mA^m + \cdots + a_1A + a_0I_3)\vec{p}_1 \\ &= a_m\alpha^m\vec{p}_1 + \cdots + a_1\alpha\vec{p}_1 + a_0\vec{p}_1 \\ &= f(\alpha)\vec{p}_1 \end{aligned}$$

同様に

$$f(A)\vec{p}_2 = f(\beta)\vec{p}_2, \quad f(A)\vec{p}_3 = f(\gamma)\vec{p}_3$$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^3$ を $V(\alpha)$, $V(\beta)$, $V(\gamma)$ のベクトルで一意的に分解できることを示す.

P は正則なので $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v}$ とすると

$$\vec{v} = P\vec{c} = c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 \in V(\alpha) + V(\beta) + V(\gamma)$$

これは

$$\mathbb{K}^3 = V(\alpha) + V(\beta) + V(\gamma)$$

さらに 一般論により 和が直和になるので

$$\mathbb{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

(Aによるスペクトル分解)

となります. 従って $\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^3$ に対して

$$\exists!\, \vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \exists!\, \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \exists\, \vec{v}_3 \in V(\gamma)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

となります. このとき $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ に対して

$$f(A)\vec{v} = f(\alpha)\vec{v}_1 + f(\beta)\vec{v}_2 + f(\gamma)\vec{v}_3$$

$f_1(\lambda) = \dfrac{\lambda-\beta}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{\lambda-\gamma}{\alpha-\gamma}$ のとき $f_1(\alpha)=1$, $f_1(\beta)=0$, $f_1(\gamma)=0$

なので

$$f_1(A)\vec{v} = \vec{v}_1$$

となります.

問　$f_2(A)\vec{v} = \vec{v}_2$, $f_3(A)\vec{v} = \vec{v}_3$ となる $f_2, f_3 \in \mathbb{K}[\lambda]$ を求めましょう.