広義固有空間 (その1)

$A \in M_n(\mathbb{K})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq \beta$ とし

(1) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^{m_1}(\lambda-\beta)^{m_2}$ $(m_1, m_2 \geq 1,\ m_1+m_2=n)$

と仮定します．このとき最小多項式は

(2) $\mu_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^{k_1}(\lambda-\beta)^{k_2}$ $(1 \leq k_1 \leq m_1,\ 1 \leq k_2 \leq m_2)$

が成立します．ここで固有値 α, β の一般固有空間を

$$W(\alpha) = \mathrm{Ker}((A-\alpha I_n)^{m_1})$$
$$W(\beta) = \mathrm{Ker}((A-\beta I_n)^{m_2})$$

と定義します．

> 定理1 $\mathbb{K}^n = W(\alpha) \oplus W(\beta)$

(証明) $(\lambda-\alpha)^{m_1}$, $(\lambda-\beta)^{m_2}$ の最大公約式が1なので

$\exists d_1(\lambda), \exists d_2(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ に対して

(2) $$d_1(\lambda)(\lambda-\beta)^{m_2} + d_2(\lambda)(\lambda-\alpha)^{m_1} = 1$$

が成立します．ここで n 次正方行列

(3) $$P_1 := d_1(A)(A-\beta I_n)^{m_2},\quad P_2 := d_2(A)(A-\alpha I_n)^{m_1}$$

と定めます．このとき C-H から

(4) $$P_1P_2 = O_n$$

が分かります．(2)から

(5) $$P_1 + P_2 = I_n$$

となりますが、この両辺に P_1, P_2 を左からかけると

(6) $$P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2$$

が従います。これから

(7) $$\boxed{\mathbb{K}^n = \mathrm{Im}\, P_1 \oplus \mathrm{Im}\,(P_2)}$$

であることが分かります。(5)から $\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$\vec{v} = P_1 \vec{v} + P_2 \vec{v}$$

が成立するので

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Im}\, P_1 + \mathrm{Im}\, P_2$$

となる。この「$+$」が「$\oplus$」であることを示す。$\vec{w}_1 \in \mathrm{Im}\, P_1$, $\vec{w}_2 \in \mathrm{Im}\, P_2$ が

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{0}$$

を満たすとする。$\vec{w}_j = P_j \vec{v}_j$ $(j=1,2)$ と表すと

$$P_1 \vec{v}_1 + P_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

となる。P_1, P_2 を左からかけると

$$P_1 \vec{v}_1 = \vec{0}, \quad P_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

となるので $\vec{w}_1 = \vec{w}_2 = \vec{0}$ となります。 $\boxed{\text{(7)が示せた}}$

次に

$$\boxed{(8)\quad \mathrm{Im}\,P_1 = W(\alpha),\quad \mathrm{Im}\,P_2 = W(\beta)}$$

を示します. $\vec{w}_1 \in \mathrm{Im}\,P_1$ とすると

$$\vec{w}_1 = d_1(A)(A-\beta I_n)^{m_2}\vec{v}_1$$

と書けます. 両辺に $(A-\alpha I_n)^{m_1}$ をかけると

$$\begin{aligned}(A-\alpha I_n)^{m_1}\vec{w}_1 &= d_1(A)(A-\alpha I_n)^{m_1}(A-\beta I_n)^{m_2}\vec{v}_1\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ CH}}{=} d_1(A)\,O_n\vec{v}_1 = \vec{0}\end{aligned}$$

となります. 従って

(9) $\quad \mathrm{Im}\,P_1 \subset W(\alpha),\quad \mathrm{Im}\,P_2 \subset W(\beta)$

であることが分かります. 逆の包含関係は次のように示せる. $\vec{v}_1 \in W(\alpha)$ とする. $P_2 = d_2(A)(A-\alpha I_n)^{m_1}$ なので

$\underline{P_2\vec{v}_1 = \vec{0}}$ となる.

$$\vec{v}_1 = P_1\vec{v}_1 + P_2\vec{v}_1 = P_1\vec{v}_1$$

から $\vec{v}_1 \in \mathrm{Im}(P_1)$ となる. 従って

(10) $\quad W(\alpha) \subset \mathrm{Im}(P_1),\ W(\beta) \subset \mathrm{Im}(P_2)$

も分かります.

さらに

$$W_0(\alpha) := \mathrm{Ker}\left((A-\alpha I_n)^{k_1}\right)$$
$$W_0(\beta) := \mathrm{Ker}\left((A-\beta I_n)^{k_2}\right)$$

とする．このとき

$\boxed{\underline{定理 2} \qquad W_0(\alpha) = W(\alpha), \quad W_0(\beta) = W(\beta)}$

$$W_0(\alpha) \subset W(\alpha), \quad W_0(\beta) \subset W(\beta)$$

は簡単に示せる．さらに $\exists \tilde{d}_1(\lambda), \exists \tilde{d}_2(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$

$$\tilde{d}_1(\lambda)(\lambda-\beta)^{k_2} + \tilde{d}_2(\lambda)(\lambda-\alpha)^{k_1} = 1$$

から $\tilde{P}_1 := \tilde{d}_1(A)(A-\beta I_n)^{k_2}, \quad \tilde{P}_2 := \tilde{d}_2(A)(A-\alpha I_n)^{k_1}$

に対して

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Im}\,\tilde{P}_1 \oplus \mathrm{Im}\,\tilde{P}_2$$

さらに

$$\mathrm{Im}\,\tilde{P}_1 = W_0(\alpha), \quad \mathrm{Im}\,\tilde{P}_2 = W_0(\beta)$$

から

$$\mathbb{K}^n = W_0(\alpha) \oplus W_0(\beta)$$

となります

$$\mathbb{K}^n = W_0(\alpha) \oplus W_0(\beta) \underset{*}{\subseteq} W(\alpha) \oplus W(\beta) = \mathbb{K}^n$$

から ＊ が ＝ となり

$$W_0(\alpha) = W(\alpha), \quad W_0(\beta) = W(\beta)$$

が従います．

$W(\alpha)$, $W(\beta)$の基底を $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{m_1'}$; $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_{m_2'}$ とすると

$$A\vec{p}_j \in W(\alpha),\ A\vec{q}_j \in W(\beta)$$

となります．これから．$P = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_{m_1'} ; \vec{q}_1 \cdots \vec{q}_{m_2'})$ とすると

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & A_2 \end{array}\right)$$

となります．これから

$$\Phi_{A_1}(\lambda)\,\Phi_{A_2}(\lambda) = \Phi_A(\lambda)$$

となります．

$$(A - \alpha I_n)^{m_1} \vec{p}_j = \vec{0}$$

から

$$(A_1 - \alpha I_{m_1'})^{m_1} = O_{m_1'}$$

が従います．

$$I_{A_1} \ni (\lambda - \alpha)^{m_1}$$

から

$$\mu_{A_1}(\lambda) \mid (\lambda - \alpha)^{m_1}$$

から

$$\mu_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{k_1'}$$

同様に

$$\mu_{A_2}(\lambda) = (\lambda - \beta)^{k_1'}$$

と書ける．これから

$$\Phi_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{m_1'},\ \Phi_{A_2}(\lambda) = (\lambda - \beta)^{m_2'}$$

となります．これから　$m_1 = m_1'$, $m_2 = m_2'$ である事が分かります．

以上で次の定理3を示しました.

$$\boxed{\text{定理3}\quad \dim W(\alpha) = m_1,\ \dim W(\beta) = m_2}$$

また

$$\boxed{\Phi_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{m_1},\quad \Phi_{A_2}(\lambda) = (\lambda - \beta)^{m_2}}$$

も示せました. さらに

$$\boxed{\mu_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{k_1},\quad \mu_{A_2}(\lambda) = (\lambda - \beta)^{k_2}}$$

も成立します. 実際,

$$(A - \alpha I_n)^{k_1} \vec{p}_j = \vec{0} \qquad (j = 1, \cdots, m_1)$$

から

$$(A_1 - \alpha I_{m_1})^{k_1} = O_{m_1}$$

同様に

$$(A_2 - \beta I_{m_2})^{k_2} = O_{m_2}$$

も成立します. もし $1 \leq k < k_1$ である k に対して

$$(A_1 - \alpha I_{m_1})^{k} = O_{m_1}$$

とすると $\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$(A - \alpha I_n)^{k} (A - \beta I_n)^{k_2} = O_n$$

となりますから 最小多項式の定義に反します.