

3変数の行列式 No2

Nobuyuki TOSE

MSF2019 April 30, 2019 (平成最後の講義)

連立1次方程式

- 3元連立1次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha_1 & \cdots (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = \alpha_2 & \cdots (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = \alpha_3 & \cdots (3) \end{cases}$$

- z を消去。 (1) $\times c_2 -$ (2) $\times c_1$

$$\begin{array}{r} a_1c_2x + b_1c_2y + c_1c_2z = \alpha_1c_2 \quad \cdots (1) \times c_2 \\ -) \quad a_2c_1x + b_2c_1y + c_1c_2z = \alpha_2c_1 \quad \cdots (2) \times c_1 \\ \hline \left| \begin{array}{cc} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{array} \right| x + \left| \begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{array} \right| y = \left| \begin{array}{cc} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{array} \right| \quad \cdots (I) \end{array}$$

連立 1 次方程式 No2

- (1) $\times c_2 - (2) \times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \dots \text{(I)}$$

- (1) $\times c_3 - (3) \times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots \text{(II)}$$

- (2) $\times c_3 - (3) \times c_2$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots \text{(III)}$$

連立 1 次方程式 No3

- $-b_1 \times (\text{III}) + b_2 \times (\text{II}) - b_3 \times (\text{I})$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- N.B. $|\vec{b} \vec{b} \vec{c}| = 0$

$$Dx = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \left(D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)$$

クラメールの公式

• 仮定 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

系

- 系 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

仮定 $D := \det(A) \neq 0$

結論 $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

証明

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\det(A) = 0$ のときは

- $A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$
- 定理 $\det(A) = 0$ を仮定する。このとき $A\vec{v} = \vec{0}$ を満たす $\vec{v} \neq \vec{0}$ が存在する。
- 注意：2次元の場合はすでに示している
2次正方行列 B が $\det(B) = 0$ を満たす

$$\Rightarrow \exists \vec{v} \neq \vec{0} \quad B\vec{v} = \vec{0}$$

証明

- 設定： $A = (\vec{a} \vec{b} \vec{c})$
- $\vec{a} = \vec{0}$ のとき

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} - 0 \cdot \vec{b} - 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

証明 No2

- $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき：基本変形を用いると

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

ただし $b_{11} \neq 0$

$$\det(A) = 0 \longrightarrow \det(B) = b_{11} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

証明 No3

• $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき : $A \rightarrow \dots \rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ ただし

$$b_{11} \neq 0 \quad \left| \begin{array}{cc} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{array} \right| = 0$$

$$\longrightarrow \exists \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$x_0 := -\frac{1}{b_{11}} (b_{12}y_0 + b_{13}z_0)$$

証明 No4

• $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき : $A \rightarrow \dots \rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \exists \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$x_0 := -\frac{1}{b_{11}} (b_{12}y_0 + b_{13}z_0)$$

$$B \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0} \longrightarrow A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

余因子

- 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$ から i 行と j 列を除く 2×2 行列

(i, j) -余因子: $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} |\tilde{A}_{11}| - a_{21} |\tilde{A}_{21}| + a_{31} |\tilde{A}_{31}| \\ &= a_{11} \Delta_{11} + a_{21} \Delta_{21} + a_{31} \Delta_{31} \end{aligned}$$

i 列の余因子展開

- 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$ から i 行と j 列を除く 2×2 行列

- (i, j) -余因子: $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} & |A| \\ &= (-1)^{i+1} a_{1i} |\tilde{A}_{1i}| + (-1)^{i+2} a_{2i} |\tilde{A}_{2i}| + (-1)^{i+3} a_{3i} |\tilde{A}_{3i}| \\ &= a_{1i} \Delta_{1i} + a_{2i} \Delta_{2i} + a_{3i} \Delta_{3i} \end{aligned}$$

2 行の余因子展開

- 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$ から i 行と j 列を除く 2×2 行列

(i, j) -余因子: $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} |A| &= -a_{21}|\tilde{A}_{21}| + a_{22}|\tilde{A}_{22}| - a_{23}|\tilde{A}_{23}| \\ &= a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23} \end{aligned}$$

余因子展開 (まとめ)

- 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$ から i 行と j 列を除く 2×2 行列

- (i, j) -余因子: $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$|A| = a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + a_{3i}\Delta_{3i}$$

$$|A| = a_{j1}\Delta_{j1} + a_{j2}\Delta_{j2} + a_{j3}\Delta_{j3}$$

クラメールの公式 (準備 No1)

- $0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$ (第3列で展開)
 $= a_{11}\Delta_{13} + a_{21}\Delta_{23} + a_{31}\Delta_{33}$

- 一般に $i \neq k$ とすると

$$a_{1i}\Delta_{1k} + a_{2i}\Delta_{2k} + a_{3i}\Delta_{3k} = 0$$

- $(\Delta_{1k} \ \Delta_{2k} \ \Delta_{3k}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix} = \begin{cases} |A| & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$

クラメールの公式 (準備 No2)

- $0 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (第1行で展開)
 $= a_{21}\Delta_{11} + a_{22}\Delta_{12} + a_{23}\Delta_{13}$

- 一般に $i \neq k$ とすると

$$a_{i1}\Delta_{k1} + a_{i2}\Delta_{k2} + a_{i3}\Delta_{k3} = 0$$

- $(a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{k1} \\ \Delta_{k2} \\ \Delta_{k3} \end{pmatrix} = \begin{cases} |A| & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$

クラメールの公式

- 余因子行列 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I_3$$

- $|A| \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$$

正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。
 - (I) A は正則。
 - (II) $\det(A) \neq 0$
 - (III) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
 - (IV) $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$ と行基本変形できます。
- (I) \Rightarrow (II) $A \cdot A^{-1} = I_3$
 $\rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_3) = 1$
 $\rightarrow \det(A) \neq 0$
- (II) \Rightarrow (I) クラメールの公式
- (I) \Rightarrow (III) $A\vec{v} = \vec{0}$
 $\rightarrow A^{-1} \cdot A\vec{v} = A^{-1}\vec{0} \rightarrow \vec{v} = I_3\vec{v} = \vec{0}$

正則性と行列式 No2

- 定理 以下は必要十分です。
 - (I) A は正則。
 - (II) $\det(A) \neq 0$
 - (III) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
 - (IV) $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$ と行基本変形できます。
- (III) \Rightarrow (II) 既に示している。
- (IV) を仮定基本行列 P_1, \dots, P_ℓ が存在して
 $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = I_n$ —(行列式をとる) \rightarrow
 $\det(P_\ell) \cdots \det(P_1) \cdot \det(A) = \det(I_3) = 1$
 $\rightarrow \det(A) \neq 0$ (条件 (II))

正則性と行列式 No3

- (IV) を否定する．基本行列 P_1, \dots, P_ℓ が存在して

$$P_\ell \cdots P_1 \cdot A = B$$

ただし

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_3$$

—(行列式をとる)→ $\det(P_\ell) \cdots \det(P_1) \cdot \det(A) = \det(B) = 0$
→ $\det(A) = 0$ (条件 NOT(II))

- NB 基本行列 P は $\det(P) \neq 0$ を満たす。