3 変数の行列式 No2

Nobuyuki TOSE

MSF2019 April 30, 2019（平成最後の講義）

連立 1 次方程式

- 3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z &= \alpha_1 & \cdots(1) \\ a_2x+b_2y+c_2z &= \alpha_2 & \cdots(2) \\ a_3x+b_3y+c_3z &= \alpha_3 & \cdots(3) \end{cases}$$

- z を消去。$(1)\times c_2-(2)\times c_1$

$$\begin{array}{rlcll} & a_1c_2x+b_1c_2y+c_1c_2z & = & \alpha_1c_2 & \cdots(1)\times c_2 \\ -) & a_2c_1x+b_2c_1y+c_1c_2z & = & \alpha_2c_1 & \cdots(2)\times c_1 \\ \hline & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y & = & \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} & \cdots(\mathrm{I}) \end{array}$$

連立 1 次方程式 No2

- $(1) \times c_2 - (2) \times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{I})$$

- $(1) \times c_3 - (3) \times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{II})$$

- $(2) \times c_3 - (3) \times c_2$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{III})$$

- $-b_1 \times (\mathrm{III}) + b_2 \times (\mathrm{II}) - b_3 \times (\mathrm{I})$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- N.B. $\left|\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{c}\right| = 0$

$$Dx = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \left(D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)$$

クラメールの公式

- 仮定 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

系

- 系 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

  仮定 $D := \det(A) \neq 0$

$$\text{結論} A\vec{v} = \vec{0} \ \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

証明

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\det(A) = 0$ のときは

- $A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$
- 定理 $\det(A) = 0$ を仮定する。このとき
  $A\vec{v} = 0$ を満たす $\vec{v} \neq \vec{0}$ が存在する。
- 注意：2 次元の場合はすでに示している
  2 次正方行列 B が $\det(B) = 0$ を満す

$$\Rightarrow \exists \vec{v} \neq \vec{0} \quad A\vec{v} = \vec{0}$$

証明

- 設定：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$
- $\vec{a} = \vec{0}$ のとき

$$\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} - 0 \cdot \vec{b} - 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

証明 No2

- $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき：基本変形を用いると

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

ただし $b_{11} \neq 0$

$$\det(A) = 0 \longrightarrow \det(B) = b_{11} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

証明 No3

- $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき：$A \to \cdots \to B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ ただし

  $b_{11} \neq 0$ $\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$

$$\longrightarrow \exists \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$x_0 := -\frac{1}{b_{11}} (b_{12} y_0 + b_{13} z_0)$$

証明 No4

- $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき：$A \to \cdots \to B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \exists \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$x_0 := -\frac{1}{b_{11}} (b_{12} y_0 + b_{13} z_0)$$

$$B \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0} \longrightarrow A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

余因子

- 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\tilde{A}_{ij} := A \text{ から } i \text{ 行と } j \text{ 列を除く} 2 \times 2 \text{行列}$$

(i, j)-余因子：$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \left| \tilde{A}_{11} \right| - a_{21} \left| \tilde{A}_{21} \right| + a_{31} \left| \tilde{A}_{31} \right| \\ &= a_{11} \Delta_{11} + a_{21} \Delta_{21} + a_{31} \Delta_{31} \end{aligned}$$

- 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\tilde{A}_{ij} := A \text{ から } i \text{ 行と } j \text{ 列を除く } 2 \times 2 \text{行列}$$

- (i, j)-余因子：$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} & |A| \\ = \ & (-)^{i+1} a_{1i} \left|\tilde{A}_{1i}\right| + (-)^{i+2} a_{2i} \left|\tilde{A}_{2i}\right| + (-)^{i+3} a_{3i} \left|\tilde{A}_{3i}\right| \\ = \ & a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + a_{3i}\Delta_{3i} \end{aligned}$$

2 行の余因子展開

- 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\tilde{A}_{ij} := A \text{ から } i \text{ 行と } j \text{ 列を除く} 2 \times 2 \text{行列}$$

(i, j)-余因子：$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} |A| &= -a_{21}|\tilde{A}_{21}| + a_{22}|\tilde{A}_{22}| - a_{23}|\tilde{A}_{23}| \\ &= a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23} \end{aligned}$$

余因子展開（まとめ）

- 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
  $\tilde{A}_{ij} :=$ A から i 行と j 列を除く 2×2 行列
- (i, j)-余因子：$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$|A| = a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + a_{3i}\Delta_{3i}$$

$$|A| = a_{j1}\Delta_{j1} + a_{j2}\Delta_{j2} + a_{j3}\Delta_{j3}$$

クラメールの公式（準備 No1）

- $0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$ (第 3 列で展開)
  $= a_{11}\Delta_{13} + a_{21}\Delta_{23} + a_{31}\Delta_{33}$
- 一般に $i \neq k$ とすると

$$a_{1i}\Delta_{1k} + a_{2i}\Delta_{2k} + a_{3i}\Delta_{3k} = 0$$

- $(\Delta_{1k}\ \Delta_{2k}\ \Delta_{3k}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix} = \begin{cases} |A| & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$

クラメールの公式（準備 No2）

- $0 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (第 1 行で展開)
  $= a_{21}\Delta_{11} + a_{22}\Delta_{12} + a_{23}\Delta_{13}$
- 一般に $i \neq k$ とすると

$$a_{i1}\Delta_{k1} + a_{i2}\Delta_{k2} + a_{i3}\Delta_{k3} = 0$$

- $(a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{k1} \\ \Delta_{k2} \\ \Delta_{k3} \end{pmatrix} = \begin{cases} |A| & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$

クラメールの公式

- 余因子行列 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$

  $$\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I_3$$

- $|A| \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$$

- 定理　以下は必要十分です。
  (I) A は正則。
  (II) $\det(A) \neq 0$
  (III) $A\vec{v} = \vec{0} \ \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  (IV) $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$ と行基本変形できます。
- **(I)⇒(II)** $A \cdot A^{-1} = I_3$
  $\to \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_3) = 1$
  $\to \det(A) \neq 0$
- **(II)⇒(I)** クラメールの公式
- **(I)⇒(III)** $A\vec{v} = \vec{0}$
  $\to A^{-1} \cdot A\vec{v} = A^{-1}\vec{0} \to \vec{v} = I_3\vec{v} = \vec{0}$

- 定理　以下は必要十分です。
  (I) A は正則。
  (II) $\det(A) \neq 0$
  (III) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  (IV) $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$ と行基本変形できます。
- **(III)**$\Rightarrow$**(II)** 既に示している。
- **(IV)** を仮定基本行列 $P_1, \cdots P_\ell$ が存在して
  $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = I_n$ —(行列式をとる)→
  $\det(P_\ell) \cdots \det(P_1) \cdot \det(A) = \det(I_3) = 1$
  $\to \det(A) \neq 0$（条件 (II)）

- **(IV)** を否定する．基本行列 $P_1, \cdots P_\ell$ が存在して

$$P_\ell \cdots P_1 \cdot A = B$$

ただし

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_3$$

—(行列式をとる)→ $\det(P_\ell) \cdots \det(P_1) \cdot \det(A) = \det(B) = 0$
$\to \det(A) = 0$（条件 NOT(II)）

- **NB** 基本行列 P は $\det(P) \neq 0$ を満す。